２種生物と２種化学物質の相互作用による走化性数理モデルの分岐解析

宇津木　翔
学修番号 17878305

2019 年 1 月 10 日

1　導入と主結果

本論文では以下の走化性数理モデルを考える.

$$\begin{cases} u_t = (D_1 u_x - \chi_1 u v_x)_x + u(\theta_1 - u), & x \in (0,L),\ t > 0, \\ v_t = D_2 v_{xx} - v + w, & x \in (0,L),\ t > 0, \\ w_t = (D_3 w_x - \chi_2 w z_x)_x + w(\theta_2 - w), & x \in (0,L),\ t > 0, \\ z_t = D_4 z_{xx} - z + u, & x \in (0,L),\ t > 0, \\ u_x(x,t) = v_x(x,t) = w_x(x,t) = z_x(x,t) = 0, & x = 0, L,\ t > 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

ここで, L は正の定数, $u(x,t), w(x,t)$ は位置 x, 時刻 t における 2 種生物の個体数を表し, $z(x,t), v(x,t)$ はそれぞれの生物が分泌する化学物質の濃度を表す. また $D_i > 0$ $(1 \leq i \leq 4)$ は拡散係数, $\theta_1, \theta_2 > 0$ は環境収容力, $\chi_1, \chi_2 \geq 0$ は走化性効果の強さを表すパラメータである. (1.1) の定常問題は次の通りである.

$$\begin{cases} (D_1 u_x - \chi_1 u v_x)_x + u(\theta_1 - u) = 0, & x \in (0,L), \\ D_2 v_{xx} - v + w = 0, & x \in (0,L), \\ (D_3 w_x - \chi_2 w z_x)_x + w(\theta_2 - w) = 0, & x \in (0,L), \\ D_4 z_{xx} - z + u = 0, & x \in (0,L), \\ u_x(x) = v_x(x) = w_x(x) = z_x(x) = 0, & x = 0, L. \end{cases} \tag{1.2}$$

正値定数定常解は $(u,v,w,z) = (\theta_1, \theta_2, \theta_2, \theta_1)$ のみである. また $\chi_1 = \chi_2 = 0$ のときは, 解 $u(x), v(x), w(x), z(x) \geq 0$ は $u(x) \neq 0, w(x) \neq 0$ ならば, $(u,v,w,z) = (\theta_1, \theta_2, \theta_2, \theta_1)$ となることが知られている.

主結果を述べるための記号として, $\lambda_k := (\frac{k\pi}{L})^2,\ k \in \{0\} \cup \mathbb{N},\ I := (0,L)$ と定義する.

得られた主結果を述べる. 非定数定常解の非存在性に関して次の結果が得られる.

定理 1.1　$D_i \geq 1$ $(1 \leq i \leq 4)$ を仮定する. 更に, $D_1\lambda_1 > 4\theta_1,\ D_3\lambda_1 > 4\theta_2$ を仮定する. このとき, ある $\bar{\chi_1},\ \bar{\chi_2}$ が存在して, $0 < \chi_1 < \bar{\chi_1},\ 0 < \chi_2 < \bar{\chi_2}$ に対して, (1.2) の非負非定数定常解は存在しない.

$K_0^2 := \min_{k \geq 1} (\chi_k^*)^2 := \min_{k \geq 1} \frac{(D_1\lambda_k + \theta_1)(D_2\lambda_k + 1)(D_3\lambda_k + \theta_2)(D_4\lambda_k + 1)}{\theta_1\theta_2\lambda_k^2}$ と定義する. このとき, 解 $(\theta_1, \theta_2, \theta_2, \theta_1)$ の安定性に関して次の結果が得られる.

定理 1.2 (1) $\chi_1\chi_2 > K_0^2$ ならば, 正値定数解 $(\theta_1, \theta_2, \theta_2, \theta_1)$ は不安定である.
(2) $\chi_1\chi_2 < K_0^2$ ならば, 正値定数解 $(\theta_1, \theta_2, \theta_2, \theta_1)$ は安定である.

以下からは $\chi_1 = \chi_2 = \chi$ として考える. $X = H_N^2(I) = \{h \in H^2(I) | h_x(0) = h_x(L) = 0\}$, $Y = L^2(I)$, $\mathbb{R}^1$ の開区間 $(0, +\infty)$ に対して, $X \times X \times X \times X \times \mathbb{R}^1$ の開集合 V を $V = X \times X \times X \times X \times (0, +\infty)$ とする. 写像 $F : V \to Y \times Y \times Y \times Y$ を次で定義する.

$$F(u, v, w, z, \chi) := \begin{pmatrix} (D_1 u_x - \chi u v_x)_x + u(\theta_1 - u) \\ D_2 v_{xx} - v + w \\ (D_3 w_x - \chi w z_x)_x + w(\theta_2 - w) \\ D_4 z_{xx} - z + u \end{pmatrix}$$

このとき, $\chi = \chi_k^*$ での分岐解（特に, 非定数正値定常解）の存在に関して次の結果が得られる.

定理 1.3 $k \neq l$ のとき $\chi_k^* \neq \chi_l^*$ を仮定する. このとき, 任意の $k \geq 1$ に対して, 十分小さな $\delta > 0$ をとれば, $X \times X \times X \times X \times \mathbb{R}^1$ における $(\theta_1, \theta_2, \theta_2, \theta_1, \chi_k^*)$ の近傍 V_0 $(\subset V)$, 原点を含む区間 $(-\delta, \delta)$, $\chi_k^*(0) = \chi_k^*$ を満たす $(-\delta, \delta)$ 上で定義された実数値連続関数 $\chi = \chi_k^*(s)$ $(s \in (-\delta, \delta))$ が存在して, $F(u, v, w, z, \chi) = 0$ を満たす点 (u, v, w, z, χ) $(\in V_0)$ の非定数解は, 次でパラメータ化できる.

$$\chi_k^*(s) = \chi_k^* + O(s), \tag{1.3}$$

$$\begin{pmatrix} u_k(s,x) \\ v_k(s,x) \\ w_k(s,x) \\ z_k(s,x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_2 \\ \theta_1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} (D_2\lambda_k + 1)(D_3\lambda_k + \theta_2)(D_4\lambda_k + 1) \\ \chi_k^* \theta_2 \lambda_k \\ \chi_k^* \theta_2 \lambda_k (D_2\lambda_k + 1) \\ (D_2\lambda_k + 1)(D_3\lambda_k + \theta_2) \end{pmatrix} \cos(\frac{k\pi x}{L}) + s \begin{pmatrix} \varphi_k(s,x) \\ \psi_k(s,x) \\ \eta_k(s,x) \\ \xi_k(s,x) \end{pmatrix}. \tag{1.4}$$

ここで, $(\varphi_k(s,x), \psi_k(s,x), \eta_k(s,x), \xi_k(s,x))$ は $(\varphi_k(s,x), \psi_k(s,x), \eta_k(s,x), \xi_k(s,x)) \in (N(D_{(u,v,w,z)}F(\theta_1, \theta_2, \theta_2, \theta_1, \chi_k^*)))^{\perp}$ かつ $(\varphi_k(0,x), \psi_k(0,x), \eta_k(0,x), \xi_k(0,x)) = (0, 0, 0, 0)$ を満たす連続関数である. 記号 $D_{(u,v,w,z)}F(\theta_1, \theta_2, \theta_2, \theta_1, \chi_k^*)$ はフレッシェ微分を表す.

定理 1.3 で得られた分岐解の分岐の形状に関して次の結果が得られる.

定理 1.4 定理 1.3 の条件の下, (1.3) を $\chi_k^*(s) = \chi_k^* + K_2 s + K_3 s^2 + o(s^2)$ と表す. このとき, $K_2 = 0$ であり, K_3 の値は $(D_1, D_2, D_3, D_4, \theta_1, \theta_2, \chi_k^*, \lambda_k, L)$ を用いて具体的な表現式を得る.

定理 1.4 によって, $K_3 \neq 0$ ならば $(\theta_1, \theta_2, \theta_2, \theta_1, \chi_k^*)$ における局所分岐曲線は pitchfork type になることを意味する.
定理 1.4 で得られた K_3 の表現式を用いて, K_3 の符号に関して次の結果が得られる.

系 1.5 $\theta_1 = \theta_2 = 1$ とする. このとき,

(1) $D_1 = D_3 = \varepsilon > 0$ で十分小さく, $D_2 = D_4 = D > 0$ のとき, $K_3 < 0$ である.
(2) $D_2 = D_4 = \varepsilon > 0$ で十分小さく, $D_1 = D_3 = D > 0$ のとき, $D < \frac{1}{\lambda_k}$ ならば, $K_3 < 0$, $D > \frac{1}{\lambda_k}$ ならば, $K_3 > 0$ である.

定理 1.6 十分小さな $\delta > 0$ に対して, $s \in (-\delta, \delta)$, $s \neq 0$, $\chi_k^* = K_0$ のときの分岐解は, $K_3 > 0$ ならば安定, $K_3 < 0$ ならば不安定である.

$\chi_k^* > K_0$ なる χ_k^* からの分岐解については, 定理 1.2 から, K_3 の符号に関わらず不安定であることもわかる.

1 種生物と 1 種化学物質による走化性数理モデルの分岐解析が [3] で行われている. また, [4] では競争項をもつ 2 種生物と 2 種化学物質の相互作用による走化性数理モデルにおける, 時間発展による解の収束に関して研究が行われている. 本論文によって, 生物間の競争効果を無視した場合の, 2 種生物と 2 種化学物質の相互作用による走化性数理モデルの分岐解析を行ったことになる. 定数解からの分岐解が不安定となる場合, 大きな振幅をもつ安定な非定数正値定常解の存在を示唆していると言える.

2 予備知識

補題 2.1 (Ω, μ) を測度空間とし, $1 \leq p, q \leq \infty$ を $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ なる実数とする. このとき, Ω 上の可測関数 f, g に対して, 次が成り立つ.

$$\|fg\|_{L^1(\Omega,\mu)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega,\mu)} \|g\|_{L^q(\Omega,\mu)}$$

定義 2.2 $J \subset \mathbb{R}^1$ を開区間とする. $f \in L^2(J)$ と $i \in \mathbb{N}$ に対して, ある $g \in L^2(J)$ が存在して,

$$\int_J f(x) D^i \phi(x) dx = -\int_J g(x)\phi(x) dx$$

が任意の $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ に対して成り立つとき, g を f の i 次の弱微分といい, $D^i f(x) = g(x)$ で表す. ここで, $D^i \phi(x) = \frac{\partial^i}{\partial x^i}\phi(x)$ である. この弱微分を用いて, ソボレフ空間 $H^m(J)$ は以下で定義される.

$$H^m(J) := \{f \in L^2(J) | D^i f \in L^2(J) \ (i = 0, 1, \cdots, m)\}.$$

また, その内積とノルムを,

$$(f, g)_{H^m(J)} := \sum_{i=0}^{m} (D^i f, D^i g)_{L^2(J)}$$

$$\|f\|_{H^m(J)} := \left\{ \sum_{i=0}^{m} \|D^i f\|^2_{L^2(J)} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

として, ヒルベルト空間になることが知られている.

補題 2.3 (ソボレフの埋め込み定理) $J \subset \mathbb{R}^1$ を有界区間とする. このとき, 任意の $f \in H^1(J)$ に対して, f は J 上の連続関数と同一視でき, ある定数 $C_0 = C_0(J) > 0$ が存在して, 次が成り立つ.

$$\|f\|_{L^\infty(J)} \leq C_0 \|f\|_{H^1(J)}.$$

補題 2.4 (ポアンカレの不等式) $J \subset \mathbb{R}^1$ を有界区間とする. このとき, $f \in H^1(J)$, $f \neq 0$, $\int_J f dx = 0$ なる f に対して, 次が成り立つ. ここで, $|J|$ は区間 J の長さを表す.

$$\left(\frac{\pi}{|J|}\right)^2 \|f\|^2_{L^2(J)} \leq \|f_x\|^2_{L^2(J)}.$$

補題 2.5 (フルビッツの安定性条件) $a_j \in \mathbb{R}$ $(j = 1, 2, 3, 4)$ とする. このとき, $f(x) = x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 = 0$ の全ての解が負の実部をもつための必要十分条件は, 次の (1) – (4) を満たすことである.

(1) $a_1 > 0$
(2) $a_3 > 0$
(3) $a_4 > 0$
(4) $a_1 a_2 a_3 > a_3^2 + a_1^2 a_4$

補題 2.6 （パーセバルの等式）有界区間 $[-J,J]$ と周期 $2J$ の周期関数 $f \in L^2([-J,J])$ に対して, 次が成り立つ.

$$\int_{-J}^{J} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2J} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| \int_{-J}^{J} f(x) \exp(-\tfrac{in\pi x}{J}) dx \right|^2 .$$

本論文では, 以下の Crandall-Rabinowitz による局所分岐定理を用いて分岐解の存在を示す.

補題 2.7 （[2] 参照）X, Y をバナッハ空間, Ω を X のある点 x_0 の近傍とする. $\mathbb{R}^1$ の開区間 (λ_1, λ_2) に対して, $X \times \mathbb{R}^1$ の開集合 V を $V = \Omega \times (\lambda_1, \lambda_2)$ と定める. $f(x_0, \lambda) = 0$ $(\lambda_1 < \lambda < \lambda_2)$ を満たす連続写像 $f : V \to Y$ を C^1-級の写像とする. このとき, $\lambda_1 < \lambda_0 < \lambda_2$ なる λ_0 が分岐点となるための十分条件を与える.

仮定 1. $D_{x,\lambda} f$ が存在して V 上作用素ノルムで連続.
仮定 2. $N(D_x f(x_0, \lambda_0))$ は 1 次元.
仮定 3. $R(D_x f(x_0, \lambda_0))$ は余次元 1 の閉部分空間.
仮定 4. $D_{x,\lambda} f(x_0, \lambda_0) x^* \notin R(D_x f(x_0, \lambda_0))$ となる $x^* \in N(D_x f(x_0, \lambda_0))$ が存在する.

以上の仮定の下で, $X \times \mathbb{R}^1$ における (x_0, λ_0) の近傍 V_0 $(\subset V)$, 原点を含む区間 $(-\delta, \delta)$, $\lambda(0) = \lambda_0$ を満たす $(-\delta, \delta)$ 上で定義された実数値連続関数 $\lambda = \lambda(s)$ $(s \in (-\delta, \delta))$ を適当にとれば, $f(x, \lambda) = 0$ を満たす点 (x, λ) $(\in V_0)$ の全体は, 次の二つの曲線 Γ_1, Γ_2 の合併と一致する;

$$\Gamma_1 = \{(sx^* + sz(s), \lambda(s));\ s \in I\},$$

$$\Gamma_2 = \{(x_0, \lambda);\ (x_0, \lambda) \in V_0\}.$$

ここで, $z = z(s)$ は, $(-\delta, \delta)$ 上で定義され, $z \in (N(D_x f(x_0, \lambda_0)))^{\perp}$ かつ $z(0) = 0$ を満たす連続関数である.

3　定理 1.1 の証明

3.1　準備

補題 3.1 (u, v, w, z) を (1.2) の非負解とする. このとき, 次が成り立つ.

$$\|u\|_{L^2(I)} \le \theta_1 \sqrt{L},\ \|w\|_{L^2(I)} \le \theta_2 \sqrt{L}.$$

証明　(1.2) の第一式を I 上積分すると,

$$\|u\|^2_{L^2(I)} = \theta_1 \|u\|_{L^1(I)}.$$

補題 2.1 より,

$$\theta_1 \|u\|_{L^1(I)} \le \theta_1 \|u\|_{L^2(I)} \sqrt{L}.$$

以上より,

$$\|u\|_{L^2(I)} \le \theta_1 \sqrt{L}.$$

同様の議論により (1.2) の第三式から,

$$\|w\|_{L^2(I)} \le \theta_2 \sqrt{L}.$$

■

補題 3.2 (u,v,w,z) を (1.2) の非負解とし, $D_2 \geq 1$, $D_4 \geq 1$ を仮定する. このとき, ある定数 $C = C(\theta_1,\theta_2,L) > 0$ が存在して, 次が成り立つ.

$$\|v\|_{H^1(I)} \leq C,\ \|v\|_{L^\infty(I)} \leq C,\ \|v_x\|_{L^\infty(I)} \leq C,$$
$$\|z\|_{H^1(I)} \leq C,\ \|z\|_{L^\infty(I)} \leq C,\ \|z_x\|_{L^\infty(I)} \leq C.$$

証明 (1.2) の第二式に v をかけて I 上積分すると, 境界条件より,

$$-D_2\int_I v_x^2 dx - \int_I v^2 dx + \int_I vw dx = 0.$$

また, 補題 2.1 より,

$$\int_I vw dx \leq \|v\|_{L^2(I)}\|w\|_{L^2(I)}.$$

よって,

$$D_2\int_I v_x^2 dx + \int_I v^2 dx \leq \|v\|_{L^2(I)}\|w\|_{L^2(I)}.$$

また,

$$\|v\|_{L^2(I)}\|w\|_{L^2(I)} \leq \frac{1}{2}\|v\|^2_{L^2(I)} + \frac{1}{2}\|w\|^2_{L^2(I)}$$

が成り立つことと, 補題 3.1 より,

$$D_2\int_I v_x^2 dx + \frac{1}{2}\int_I v^2 dx \leq \frac{1}{2}\|w\|^2_{L^2(I)} \leq \frac{1}{2}\theta_2^2 L.$$

仮定より,

$$\frac{1}{2}\int_I v_x^2 dx + \frac{1}{2}\int_I v^2 dx \leq \frac{1}{2}\theta_2^2 L$$

が成り立つので,

$$\|v\|_{H^1(I)} \leq C(\theta_2, L)$$

を得る. また, 補題 2.3 より,

$$\|v\|_{L^\infty(I)} \leq C(\theta_2, L)$$

を得る. 更に,

$$v_{xx} = \frac{1}{D_2}(v - w)$$

より,

$$\begin{aligned}
\|v_{xx}\|_{L^2(I)} &\leq \frac{1}{D_2}(\|v\|_{L^2(I)} + \|w\|_{L^2(I)}) \\
&\leq \|v\|_{L^2(I)} + \|w\|_{L^2(I)} \\
&\leq 2\|w\|_{L^2(I)} \\
&\leq 2\theta_2\sqrt{L}.
\end{aligned}$$

すなわち,

$$\begin{aligned}
\|v_x\|_{L^\infty(I)} &\leq C_0\|v_x\|_{H^1(I)} \\
&\leq C_0(\|v\|^2_{H^1(I)} + \|v_{xx}\|^2_{L^2(I)})^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C(\theta_2, L)
\end{aligned}$$

を得る. 同様の議論により (1.2) の第四式から,

$$\|z\|_{H^1(I)} \le C(\theta_1, L),\ \|z\|_{L^\infty(I)} \le C(\theta_1, L),\ \|z_x\|_{L^\infty(I)} \le C(\theta_1, L)$$

を得る. 改めて,$C = C(\theta_1, \theta_2, L) = \max(C(\theta_1, L), C(\theta_2, L))$ と定めることで,

$$\|v\|_{H^1(I)} \le C,\ \|v\|_{L^\infty(I)} \le C,\ \|v_x\|_{L^\infty(I)} \le C,$$
$$\|z\|_{H^1(I)} \le C,\ \|z\|_{L^\infty(I)} \le C,\ \|z_x\|_{L^\infty(I)} \le C$$

が成り立つ. ■

補題 3.3 (u, v, w, z) を (1.2) の非負解とし, $D_1 \ge 1,\ D_3 \ge 1$ を仮定する. このとき, ある $\chi_1',\ \chi_2' > 0$ と, ある定数 $C' = C'(\theta_1, \theta_2, L) > 0$ が存在して, $0 < \chi_1 < \chi_1',\ 0 < \chi_2 < \chi_2'$ に対して, 次が成り立つ.

$$\|u\|_{L^\infty(I)} \le C',\ \|w\|_{L^\infty(I)} \le C'.$$

証明 (1.2) の第一式に u をかけて I 上積分すると, 境界条件より,

$$-D_1 \int_I u_x^2 dx + \chi_1 \int_I u u_x v_x dx + \theta_1 \int_I u^2 dx - \int_I u^3 dx = 0.$$

補題 2.1, 補題 3.1, 補題 3.2 より,

$$\begin{aligned} D_1 \int_I u_x^2 dx &= \chi_1 \int_I u u_x v_x dx + \theta_1 \int_I u^2 dx - \int_I u^3 dx \\ &\le \chi_1 \int_I |u||u_x||v_x| dx + \theta_1 \int_I u^2 dx \\ &\le C\chi_1 \int_I |u||u_x| dx + \theta_1^3 L \\ &\le C\chi_1 \left(\frac{1}{2} \int_I u^2 dx + \frac{1}{2} \int_I u_x^2 dx \right) + \theta_1^3 L. \end{aligned}$$

ここで, $\chi_1' > 0,\ C\chi_1' \le 1$ とすると, $0 < \chi_1 < \chi_1'$ に対して, 仮定より,

$$\int_I u_x^2 dx \le \frac{1}{2} \int_I u^2 dx + \frac{1}{2} \int_I u_x^2 dx + \theta_1^3 L.$$

すなわち,

$$\int_I u_x^2 dx \le \int_I u^2 dx + 2\theta_1^3 L \le \theta_1^2 L(1 + 2\theta_1).$$

すなわち,

$$\|u\|_{H^1(I)} \le C'(\theta_1, L).$$

補題 2.3 より,

$$\|u\|_{L^\infty(I)} \le C_0 C'(\theta_1, L)$$

を得る. 同様の議論により (1.2) の第三式から, $\chi_2' > 0,\ C\chi_2' \le 1$ とすると, $0 < \chi_2 < \chi_2'$ に対して,

$$\|w\|_{L^\infty(I)} \le C_0 C'(\theta_2, L)$$

を得る. 改めて, $C' = C'(\theta_1, \theta_2, L) = \max(C_0 C'(\theta_1, L), C_0 C'(\theta_2, L))$ と定めることで,

$$\|u\|_{L^\infty(I)} \le C',\ \|w\|_{L^\infty(I)} \le C'$$

が成り立つ. ■

3.2　定理 1.1 の証明

(u,v,w,z) を (1.2) の非負解とし, $\alpha=\frac{1}{L}\int_I udx,\ \beta=\frac{1}{L}\int_I vdx,\ \gamma=\frac{1}{L}\int_I wdx,\ \delta=\frac{1}{L}\int_I zdx$ とする. 補題 3.2, 補題 3.3 より, $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ は $0<\chi_1<\chi_1',\ 0<\chi_2<\chi_2'$ に対して, 一様有界となる.
また, $U(x)=u(x)-\alpha,\ V(x)=v(x)-\beta,\ W(x)=w(x)-\gamma,\ Z(x)=z(x)-\delta$ とおく. このとき, 次が成り立つ.

$$\int_I Udx=\int_I Vdx=\int_I Wdx=\int_I Zdx=0,$$

$$\beta=\frac{1}{L}\int_I vdx=\frac{1}{L}\int_I (D_2v_{xx}+w)dx=\frac{1}{L}\int_I wdx=\gamma,$$

$$\delta=\frac{1}{L}\int_I zdx=\frac{1}{L}\int_I (D_1z_{xx}+u)dx=\frac{1}{L}\int_I udx=\alpha.$$

(1.2) のモデルは次で書き換えられる.

$$\begin{cases}(D_1U_x-\chi_1uV_x)_x+u(\theta_1-u)=0, & x\in I,\\ D_2V_{xx}-V+W=0, & x\in I,\\ (D_3W_x-\chi_2wZ_x)_x+w(\theta_2-w)=0, & x\in I,\\ D_4Z_{xx}-Z+U=0, & x\in I,\\ U_x(x)=V_x(x)=W_x(x)=Z_x(x)=0, & x=0,L.\end{cases} \tag{3.1}$$

$g(t)=t(\theta_1-t)$ とおく. (3.1) の第一式に U をかけて I 上積分すると, 境界条件より,

$$-D_1\int_I U_x^2dx+\chi_1\int_I uU_xV_xdx+\int_I g(u)Udx=0.$$

補題 3.2, $\int_I g(\alpha)Udx=0$ より,

$$\begin{aligned}D_1\int_I U_x^2dx&=\chi_1\int_I uU_xV_xdx+\int_I (g(u)-g(\alpha))Udx\\ &\le C\chi_1\int_I |U_x||V_x|dx+\int_I (g(u)-g(\alpha))Udx\\ &\le C\chi_1\left(\frac{1}{2}\int_I U_x^2dx+\frac{1}{2}\int_I V_x^2dx\right)+\int_I (g(u)-g(\alpha))Udx.\end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned}g(u)-g(\alpha)&=u(\theta_1-u)-\alpha(\theta_1-\alpha)\\ &=\theta_1U-(u+\alpha)U\end{aligned}$$

より,

$$\int_I g(u)-g(\alpha)Udx=\theta_1\int_I U^2dx-\int_I (u+\alpha)U^2dx\le\theta_1\int_I U^2dx.$$

すなわち, $\chi_1'>\bar{\chi_1}>0$ かつ $C\bar{\chi_1}\le D_1$ とすると, $0<\chi_1<\bar{\chi_1}$ に対して,

$$\frac{D_1}{2}\int_I U_x^2dx\le\frac{C\chi_1}{2}\int_I V_x^2dx+\theta_1\int_I U^2dx. \tag{3.2}$$

同様の議論により (3.1) の第三式から, $\chi_2' > \bar{\chi_2} > 0$ かつ $C\bar{\chi_2} \le D_3$ とすると, $0 < \chi_2 < \bar{\chi_2}$ に対して,

$$\frac{D_3}{2}\int_I W_x^2 dx \le \frac{C\chi_2}{2}\int_I Z_x^2 dx + \theta_2 \int_I W^2 dx. \tag{3.3}$$

また, (3.1) の第二式に V をかけて I 上積分すると, 境界条件より,

$$-D_2\int_I V_x^2 dx - \int_I V^2 dx + \int_I VW dx = 0.$$

すなわち,

$$D_2\int_I V_x^2 dx + \int_I V^2 dx = \int_I VW dx \le \int_I V^2 dx + \frac{1}{4}\int_I W^2 dx$$

より,

$$D_2\int_I V_x^2 dx \le \frac{1}{4}\int_I W^2 dx. \tag{3.4}$$

同様の議論により (3.1) の第四式から,

$$D_4\int_I Z_x^2 dx \le \frac{1}{4}\int_I U^2 dx. \tag{3.5}$$

一方, 補題 2.4 より,

$$\lambda_1\int_I U^2 dx \le \int_I U_x^2 dx, \tag{3.6}$$

$$\lambda_1\int_I W^2 dx \le \int_I W_x^2 dx. \tag{3.7}$$

(3.2)-(3.7) より,

$$\begin{aligned}\lambda_1\int_I U^2 dx + \lambda_1\int_I W^2 dx &\le \frac{C\chi_1}{D_1}\int_I V_x^2 dx + \frac{2\theta_1}{D_1}\int_I U^2 dx + \frac{C\chi_2}{D_3}\int_I Z_x^2 dx + \frac{2\theta_2}{D_3}\int_I W^2 dx \\ &\le \left(\frac{2\theta_1}{D_1} + \frac{C\chi_2}{4D_3D_4}\right)\int_I U^2 dx + \left(\frac{2\theta_2}{D_3} + \frac{C\chi_1}{4D_1D_2}\right)\int_I W^2 dx.\end{aligned}$$

すなわち, $\frac{C\chi_2}{4D_3D_4} \le \frac{2\theta_1}{D_1}$ となるように, さらに $\bar{\chi_2}$ を小さくとり直すことで, $\chi_2 < \bar{\chi_2}$ なるとき, 仮定 $D_1\lambda_1 > 4\theta_1$ より, $U = 0$.
また, $\frac{C\chi_1}{4D_1D_2} \le \frac{2\theta_2}{D_3}$ となるように, さらに $\bar{\chi_1}$ を小さくとり直すことで, $\chi_1 < \bar{\chi_1}$ なるとき, 仮定 $D_3\lambda_1 > 4\theta_2$ より, $W = 0$.
以上より, $(u, v, w, z) = (\alpha, \beta, \beta, \alpha)$ であり, (1.2) の非負非定数定常解は存在しない. ■

4 定理 1.2 の証明

$(\theta_1, \theta_2, \theta_2, \theta_1)$ での線形化固有値問題を考える. 十分小さな $(\varphi(x), \psi(x), \eta(x), \xi(x))$ を,

$$(\varphi, \psi, \eta, \xi) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(\tfrac{n\pi x}{L}),\ \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cos(\tfrac{n\pi x}{L}),\ \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos(\tfrac{n\pi x}{L}),\ \sum_{n=0}^{\infty} d_n \cos(\tfrac{n\pi x}{L})\right)$$

として,

$$(u, v, w, z) = (\theta_1, \theta_2, \theta_2, \theta_1) + \mathrm{e}^{\mu t}(\varphi, \psi, \eta, \xi)$$

とする. $(u,v,w,z)=(\theta_1,\theta_2,\theta_2,\theta_1)$ に対して, (1.2) をフレッシェ微分した式を用いて,

$$\begin{pmatrix} -D_1\frac{d^2}{dx^2}-\theta_1 & \chi_1\theta_1\frac{d^2}{dx^2} & 0 & 0 \\ 0 & -D_2\frac{d^2}{dx^2}-1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -D_3\frac{d^2}{dx^2}-\theta_2 & \chi_2\theta_2\frac{d^2}{dx^2} \\ 1 & 0 & 0 & -D_4\frac{d^2}{dx^2}-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\\ \eta\\ \xi\end{pmatrix}=\mu\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\\ \eta\\ \xi\end{pmatrix}$$

を得る. 両辺に $\cos(\frac{m\pi x}{L})$ をかけて I 上積分して $A_m := \begin{pmatrix} -D_1\lambda_m-\theta_1 & \chi_1\theta_1\lambda_m & 0 & 0 \\ 0 & -D_2\lambda_m-1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -D_3\lambda_m-\theta_2 & \chi_2\theta_2\lambda_m \\ 1 & 0 & 0 & -D_4\lambda_m-1 \end{pmatrix}$

として,

$$A_m\begin{pmatrix}a_m\\ b_m\\ c_m\\ d_m\end{pmatrix}=\mu\begin{pmatrix}a_m\\ b_m\\ c_m\\ d_m\end{pmatrix}$$

を得る. このとき, ある $m\in\mathbb{N}$ に対して, 固有値 μ の実部が正のものをもてば, 解 $(\theta_1,\theta_2,\theta_2,\theta_1)$ は不安定となり, 全ての $m\in\mathbb{N}$ に対して, 固有値 μ の実部が全て負ならば, 解 $(\theta_1,\theta_2,\theta_2,\theta_1)$ は安定となることが知られている. A_m の固有多項式 $p_m(\Lambda)$ を次で定義する.

$$\begin{aligned} p_m(\Lambda) &:= \det(\Lambda I-A_m) \\ &= \begin{vmatrix} \Lambda+D_1\lambda_m+\theta_1 & -\chi_1\theta_1\lambda_m & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda+D_2\lambda_m+1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda+D_3\lambda_m+\theta_2 & -\chi_2\theta_2\lambda_m \\ -1 & 0 & 0 & \Lambda+D_4\lambda_m+1 \end{vmatrix} \\ &= (\Lambda+D_1\lambda_m+\theta_1)(\Lambda+D_2\lambda_m+1)(\Lambda+D_3\lambda_m+\theta_2)(\Lambda+D_4\lambda_m+1)-\chi_1\chi_2\theta_1\theta_2\lambda_m^2. \end{aligned}$$

ここで,

$$p_m(\Lambda) := (\Lambda+\alpha_1)(\Lambda+\alpha_2)(\Lambda+\alpha_3)(\Lambda+\alpha_4)-\gamma\beta$$

ただし,

$$\alpha_1=D_1\lambda_m+\theta_1,\ \alpha_2=D_2\lambda_m+1,\ \alpha_3=D_3\lambda_m+\theta_2,\ \alpha_4=D_4\lambda_m+1,$$

$$\gamma=\theta_1\theta_2\lambda_m^2,\ \beta=\chi_1\chi_2$$

とする.

$$p_m(\Lambda)=\Lambda^4+a_1\Lambda^3+a_2\Lambda^2+a_3\Lambda+a_4$$

とかくとき,

$$a_4=a_4(\beta):=\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4-\gamma\beta$$

であり, a_1,a_2,a_3 は $\{\alpha_j\}_{j=1}^4$ のみにより β によらない. $\beta=0$ のとき,

$$a_1>0,\ a_3>0,\ a_4(0)>0,\ a_1a_2a_3>a_3^2+a_1^2a_4(0)$$

が成り立つ. ここで, 任意の $\beta\geq 0$ に対して, $a_4(\beta)$ は β に関して単調減少なので,

$$a_1a_2a_3>a_3^2+a_1^2a_4(\beta)$$

が成り立つ. よって補題 2.5 より, $\beta \geq 0$ において, $p_m(\Lambda) = 0$ の全ての解が負の実部をもつための必要十分条件は,

$$a_4(\beta) > 0$$

すなわち,

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 > \gamma\beta$$

である. 一方,

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 < \gamma\beta$$

ならば, $p_m(\Lambda) = 0$ のある解が正の実部をもつ. 以上より,
$\chi_1\chi_2 > K_0^2$ ならば, ある m で

$$\chi_1\chi_2 > \frac{(D_1\lambda_m + \theta_1)(D_2\lambda_m + 1)(D_3\lambda_m + \theta_2)(D_4\lambda_m + 1)}{\theta_1\theta_2\lambda_m^2}$$

であり, すなわち $p_m(0) < 0$ となるので, 解 $(\theta_1, \theta_2, \theta_2, \theta_1)$ は不安定である.
また, $\chi_1\chi_2 < K_0^2$ ならば, 全ての m で

$$\chi_1\chi_2 < \frac{(D_1\lambda_m + \theta_1)(D_2\lambda_m + 1)(D_3\lambda_m + \theta_2)(D_4\lambda_m + 1)}{\theta_1\theta_2\lambda_m^2}$$

であり, すなわち $p_m(0) > 0$ となるので, 解 $(\theta_1, \theta_2, \theta_2, \theta_1)$ は安定である. ■

5　定理 1.3 の証明

簡単のため, 以後, $\bar{u} = (\theta_1, \theta_2, \theta_2, \theta_1)$ とする. 任意の $\chi \in \mathbb{R}^+$ に対して, $F(\theta_1, \theta_2, \theta_2, \theta_1, \chi) = 0$. また, $(u, v, w, z) = (\theta_1, \theta_2, \theta_2, \theta_1)$ に対して, F のフレッシェ微分 $D_{\vec{u}}F(\bar{u}, \chi) \in L(X^4, Y^4)$ は, 次のようになる.

$$D_{\vec{u}}F(\bar{u}, \chi)(u, v, w, z) := D_{(u,v,w,z)}F(\theta_1, \theta_2, \theta_2, \theta_1, \chi)(u, v, w, z) = \begin{pmatrix} D_1u_{xx} - \chi\theta_1v_{xx} - \theta_1u \\ D_2v_{xx} - v + w \\ D_3w_{xx} - \chi\theta_2z_{xx} - \theta_2w \\ D_4z_{xx} - z + u \end{pmatrix}.$$

ここで, $(u, v, w, z) \in N(D_{\vec{u}}F(\bar{u}, \chi^*))$ とする. また,

$$(u, v, w, z) = (\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos(\tfrac{k\pi x}{L}),\ \sum_{k=0}^{\infty} b_k \cos(\tfrac{k\pi x}{L}),\ \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cos(\tfrac{k\pi x}{L}),\ \sum_{k=0}^{\infty} d_k \cos(\tfrac{k\pi x}{L}))$$

として代入し, 各 k に対して $\chi = \chi_k^*$ とおき, 両辺に $\cos(\frac{l\pi x}{L})$ をかけて I 上積分する. 行列 $A_j(\chi_k^*)$ を次で定義することで, すべての $l \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ に対して, 次が成り立つことと同値となる.

$$A_l(\chi_k^*)\begin{pmatrix} a_l \\ b_l \\ c_l \\ d_l \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -D_1\lambda_l - \theta_1 & \chi_k^*\theta_1\lambda_l & 0 & 0 \\ 0 & -D_2\lambda_l - 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -D_3\lambda_l - \theta_2 & \chi_k^*\theta_2\lambda_l \\ 1 & 0 & 0 & -D_4\lambda_l - 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_l \\ b_l \\ c_l \\ d_l \end{pmatrix} = 0.$$

$$|A_l(\chi_k^*)| = (D_1\lambda_l + \theta_1)(D_2\lambda_l + 1)(D_3\lambda_l + \theta_2)(D_4\lambda_l + 1) - (\chi_k^*)^2\theta_1\theta_2\lambda_l^2.$$

ここで, 補題 2.7 を適応するために, 補題 2.7 の仮定を確認する.

仮定 1. $D_{\vec{u},\chi}F$ が存在して, V 上作用素ノルムで連続.

$$D_{\vec{u}}F(\vec{u},\chi)(\varphi,\psi,\eta,\xi)=\begin{pmatrix} D_1\varphi_{xx}-\chi u\psi_{xx}-\chi\varphi v_{xx}-\chi\varphi_x v_x-\chi u_x\psi_x+(\theta_1-2u)\varphi \\ D_2\psi_{xx}-\psi+\eta \\ D_3\eta_{xx}-\chi w\xi_{xx}-\chi\eta z_{xx}-\chi\eta_x z_x-\chi w_x\xi_x+(\theta_2-2w)\eta \\ D_4\xi_{xx}-\xi+\varphi \end{pmatrix}$$

より, $D_{\vec{u}}F(\vec{u},\chi)$ をさらに微分して, 次を得る.

$$D_{\vec{u},\chi}F(\vec{u},\chi)(\varphi,\psi,\eta,\xi)=\begin{pmatrix} -u\psi_{xx}-\varphi v_{xx}-\varphi_x v_x-u_x\psi_x \\ 0 \\ -w\xi_{xx}-\eta z_{xx}-\eta_x z_x-w_x\xi_x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

すなわち,

$$\begin{aligned}&(D_{\vec{u},\chi}F(\vec{u_1},\chi_2)-D_{\vec{u},\chi}F(\vec{u_2},\chi_2))(\varphi,\psi,\eta,\xi)\\ &\qquad=\begin{pmatrix} -((v_1)_x-(v_2)_x)\varphi_x-((v_1)_{xx}-(v_2)_{xx})\varphi-(u_1-u_2)\psi_{xx}-((u_1)_x-(u_2)_x)\psi_x \\ 0 \\ -((z_1)_x-(z_2)_x)\eta_x-((z_1)_{xx}-(z_2)_{xx})\eta-(w_1-w_2)\xi_{xx}-((w_1)_x-(w_2)_x)\xi_x \\ 0 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\|(D_{\vec{u},\chi}F(\vec{u_1},\chi_2)-D_{\vec{u},\chi}F(\vec{u_2},\chi_2))(\varphi,\psi,\eta,\xi)\|_{Y^4}^2\\ &=\|-((v_1)_x-(v_2)_x)\varphi_x-((v_1)_{xx}-(v_2)_{xx})\varphi-(u_1-u_2)\psi_{xx}-((u_1)_x-(u_2)_x)\psi_x\|_{L^2}^2\\ &+\|-((z_1)_x-(z_2)_x)\eta_x-((z_1)_{xx}-(z_2)_{xx})\eta-(w_1-w_2)\xi_{xx}-((w_1)_x-(w_2)_x)\xi_x\|_{L^2}^2\\ &\le(\|(v_1)_x-(v_2)_x\|_{L^\infty}\|\varphi_x\|_{L^2}+\|(v_1)_{xx}-(v_2)_{xx}\|_{L^2}\|\varphi\|_{L^\infty}+\|u_1-u_2\|_{L^\infty}\|\psi_{xx}\|_{L^2}+\|(u_1)_x-(u_2)_x\|_{L^\infty}\|\psi_x\|_{L^2})^2\\ &+(\|(z_1)_x-(z_2)_x\|_{L^\infty}\|\eta_x\|_{L^2}+\|(z_1)_{xx}-(z_2)_{xx}\|_{L^2}\|\eta\|_{L^\infty}+\|w_1-w_2\|_{L^\infty}\|\xi_{xx}\|_{L^2}+\|(w_1)_x-(w_2)_x\|_{L^\infty}\|\xi_x\|_{L^2})^2\\ &\le C(\|v_1-v_2\|_{H^2}\|\varphi\|_{H^2}+\|u_1-u_2\|_{H^2}\|\psi\|_{H^2})^2+C(\|z_1-z_2\|_{H^2}\|\eta\|_{H^2}+\|w_1-w_2\|_{H^2}\|\xi\|_{H^2})^2\\ &\le C\left\|\begin{pmatrix} u_1-u_2 \\ v_1-v_2 \\ w_1-w_2 \\ z_1-z_2 \end{pmatrix}\right\|_{X^4}^2\left\|\begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \\ \eta \\ \xi \end{pmatrix}\right\|_{X^4}^2\end{aligned}$$

より,

$$\|(D_{\vec{u},\chi}F(\vec{u_1},\chi_2)-D_{\vec{u},\chi}F(\vec{u_2},\chi_2))(\varphi,\psi,\eta,\xi)\|_{L(X^4,Y^4)}\le C\|\vec{u_1}-\vec{u_2}\|_{X^4}$$

を得る. よって仮定 1 が確かめられた.

仮定 2. $N(D_{\vec{u}}F(\bar{u},\chi_k^*))$ が 1 次元.

仮定より, $l\ne k$ のとき $\chi_l^*\ne\chi_k^*$ なので, $l\ne k$ なる l に対して, $A_l(\chi_k^*)$ は正則行列となる. よって, $l=k$ に対しては,

$$A_k(\chi_k^*)\begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \\ d_k \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -(D_1\lambda_k+\theta_1)a_k+\chi_k^*\theta_1\lambda_k b_k \\ -(D_2\lambda_k+1)b_k+c_k \\ -(D_3\lambda_k+\theta_2)c_k+\chi_k^*\theta_2\lambda_k d_k \\ a_k-(D_4\lambda_k+1)d_k \end{pmatrix}=0.$$

これを解いて, ある定数 c を用いて次を得る.

$$\begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \\ d_k \end{pmatrix}=c\begin{pmatrix} (D_2\lambda_k+1)(D_3\lambda_k+\theta_2)(D_4\lambda_k+1) \\ \chi_k^*\theta_2\lambda_k \\ \chi_k^*\theta_2\lambda_k(D_2\lambda_k+1) \\ (D_2\lambda_k+1)(D_3\lambda_k+\theta_2) \end{pmatrix}.$$

よって,

$$N(D_{\vec{u}}F(\bar{u},\chi_k^*)) = c\begin{pmatrix}(D_2\lambda_k+1)(D_3\lambda_k+\theta_2)(D_4\lambda_k+1)\\ \chi_k^*\theta_2\lambda_k\\ \chi_k^*\theta_2\lambda_k(D_2\lambda_k+1)\\ (D_2\lambda_k+1)(D_3\lambda_k+\theta_2)\end{pmatrix}\cos(\frac{k\pi x}{L})$$

を得る. よって仮定 2 が確かめられた.

仮定 3. $R(D_{\vec{u}}F(\bar{u},\chi_k^*))$ は余次元 1 の閉部分空間.
$(\varphi,\psi,\eta,\xi) \in (R(D_{\vec{u}}F(\bar{u},\chi_k^*)))^{\perp}$ とする. このような (φ,ψ,η,ξ) が 1 次元であることを示す. 任意の $(u,v,w,z)\in X^4$ に対して,

$$(D_{\vec{u}}F(\bar{u},\chi_k^*)(u,v,w,z),\ (\varphi,\psi,\eta,\xi))_{L^2(I)} = \begin{pmatrix}\{-(D_1\lambda_k+\theta_1)u+\chi_k^*\theta_1\lambda_k v\}\varphi\\ \{-(D_2\lambda_k+1)v+w\}\psi\\ \{-(D_3\lambda_k+\theta_2)w+\chi_k^*\theta_2\lambda_k z\}\eta\\ \{u-(D_4\lambda_k+1)z\}\xi\end{pmatrix} = 0$$

が成り立つ. ここで,

$$(u,v,w,z) = (\sum_{k=0}^{\infty} a_k\cos(\tfrac{k\pi x}{L}),\ \sum_{k=0}^{\infty} b_k\cos(\tfrac{k\pi x}{L}),\ \sum_{k=0}^{\infty} c_k\cos(\tfrac{k\pi x}{L}),\ \sum_{k=0}^{\infty} d_k\cos(\tfrac{k\pi x}{L})),$$

$$(\varphi,\psi,\eta,\xi) = (\sum_{l=0}^{\infty} \alpha_l\cos(\tfrac{l\pi x}{L}),\ \sum_{l=0}^{\infty} \beta_l\cos(\tfrac{l\pi x}{L}),\ \sum_{l=0}^{\infty} \gamma_l\cos(\tfrac{l\pi x}{L}),\ \sum_{l=0}^{\infty} \delta_l\cos(\tfrac{l\pi x}{L}))$$

として代入し,

$$\begin{aligned}(D_{\vec{u}}F(\bar{u},\chi_k^*)(u,v,w,z),(\varphi,\psi,\eta,\xi))_{L^2(I)} &= \sum_{l=0}^{\infty}\{-(D_1\lambda_l+\theta_1)a_l+\chi_k^*\theta_1\lambda_l b_l\}\alpha_l + \sum_{l=0}^{\infty}\{-(D_2\lambda_l+1)b_l+c_l\}\beta_l\\ &\quad+\sum_{l=0}^{\infty}\{-(D_3\lambda_l+\theta_2)c_l+\chi_k^*\theta_2\lambda_l d_l\}\gamma_l+\sum_{l=0}^{\infty}\{a_l-(D_4\lambda_l+1)d_l\}\delta_l\\ &= \sum_{l=0}^{\infty}(\alpha_l\ \beta_l\ \gamma_l\ \delta_l)A_l(\chi_k^*)\begin{pmatrix}a_l\\ b_l\\ c_l\\ d_l\end{pmatrix}\\ &= 0.\end{aligned}$$

ここで, $l\neq k$ のとき, $A_l(\chi_k^*)$ は正則行列なので, ある $\begin{pmatrix}a_l\\ b_l\\ c_l\\ d_l\end{pmatrix}$ に対して, $A_l(\chi_k^*)\begin{pmatrix}a_l\\ b_l\\ c_l\\ d_l\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_l\\ \beta_l\\ \gamma_l\\ \delta_l\end{pmatrix}$ が存在する.

さらに, $l'\neq l$ に対しては, $\begin{pmatrix}a_l'\\ b_l'\\ c_l'\\ d_l'\end{pmatrix} = 0$ ととることで, $\alpha_l^2+\beta_l^2+\gamma_l^2+\delta_l^2 = 0$ すなわち $\alpha_l=\beta_l=\gamma_l=\delta_l=0$ を得る. $l=k$ のときは, $(\alpha_k\ \beta_k\ \gamma_k\ \delta_k)A_k(\chi_k^*)\begin{pmatrix}a_k\\ b_k\\ c_k\\ d_k\end{pmatrix} = 0$. (u,v,w,z) の任意性から, $(\alpha_k\ \beta_k\ \gamma_k\ \delta_k)A_k(\chi_k^*) = 0$.

すなわち, ${}^tA_k(\chi_k^*)\begin{pmatrix}\alpha_k\\ \beta_k\\ \gamma_k\\ \delta_k\end{pmatrix}=0$ で, $\begin{pmatrix}\alpha_k\\ \beta_k\\ \gamma_k\\ \delta_k\end{pmatrix}\in N({}^tA_k(\chi_k^*))=c\begin{pmatrix}(D_2\lambda_k+1)(D_3\lambda_k+\theta_2)\\ \chi_k^*\theta_1\lambda_k(D_3\lambda_k+\theta_2)\\ \chi_k^*\theta_1\lambda_k\\ (D_1\lambda_k+\theta_1)(D_2\lambda_k+1)(D_3\lambda_k+\theta_2)\end{pmatrix}$ より,
$(\alpha_k,\beta_k,\gamma_k,\delta_k)$ は 1 次元. 以上より, (φ,ψ,η,ξ) は 1 次元.
次に, $R(D_{\vec{u}}F(\bar{u},\chi_k^*))$ が閉部分空間であることを示す.
$R(D_{\vec{u}}F(\bar{u},\chi_k^*))=\{D_{\vec{u}}F(\bar{u},\chi_k^*)(\varphi,\psi,\eta,\xi)|(\varphi,\psi,\eta,\xi)\in X^4\}$ であり, 部分空間をなすことはすぐにわかるので, 閉であることを示す. 列 $(\varphi^{(m)},\psi^{(m)},\eta^{(m)},\xi^{(m)})\in X^4$ をとり,

$$D_{\vec{u}}F(\bar{u},\chi_k^*)(\varphi^{(m)},\psi^{(m)},\eta^{(m)},\xi^{(m)})\to(f,g,h,k)\ in\ Y^4\ (m\to\infty)$$

として

$$(f,g,h,k)\in R(D_{\vec{u}}F(\bar{u},\chi_k^*))$$

を示す.

$$\begin{cases}D_1\varphi_{xx}^{(m)}-\chi_k^*\theta_1\psi_{xx}^{(m)}-\theta_1\varphi^{(m)} & \to f\ in\ L^2(I)\\ D_2\psi_{xx}^{(m)}-\psi^{(m)}+\eta^{(m)} & \to g\ in\ L^2(I)\\ D_3\eta_{xx}^{(m)}-\chi_k^*\theta_2\xi_{xx}^{(m)}-\theta_2\eta^{(m)} & \to h\ in\ L^2(I)\\ D_4\xi_{xx}^{(m)}-\xi^{(m)}+\varphi^{(m)} & \to k\ in\ L^2(I)\end{cases}$$

より, ある定数 $C>0$ が存在して, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned}&\|D_1\varphi_{xx}^{(m)}-\chi\theta_1\psi_{xx}^{(m)}-\theta_1\varphi^{(m)}\|_{L^2(I)}\le C,\\ &\|D_2\psi_{xx}^{(m)}-\psi^{(m)}+\eta^{(m)}\|_{L^2(I)}\le C,\\ &\|D_3\eta_{xx}^{(m)}-\chi\theta_2\xi_{xx}^{(m)}-\theta_2\eta^{(m)}\|_{L^2(I)}\le C,\\ &\|D_4\xi_{xx}^{(m)}-\xi^{(m)}+\varphi^{(m)}\|_{L^2(I)}\le C.\end{aligned}\tag{5.1}$$

step1. ある定数 $C>0$ が存在して, 次が成り立つ.

$$\|\varphi^{(m)}\|_{L^2(I)}^2+\|\psi^{(m)}\|_{L^2(I)}^2+\|\eta^{(m)}\|_{L^2(I)}^2+\|\xi^{(m)}\|_{L^2(I)}^2\le C\ (m\ge 1).$$

証明.
$\phi_n(x):=\sqrt{\frac{2}{L}}\cos(\frac{n\pi x}{L})$ とすると,

$$(\phi_n,\phi_m)_{L^2(I)}=\begin{cases}1\ (n=m)\\ 0\ (n\neq m)\end{cases}$$

が成り立つ. ここで,

$$\varphi^{(m)}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n^{(m)}\phi_n(x),\ \psi^{(m)}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n^{(m)}\phi_n(x),\ \eta^{(m)}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_n^{(m)}\phi_n(x),\ \xi^{(m)}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\delta_n^{(m)}\phi_n(x)$$

と展開する. 補題 2.6 より,

$$\|\varphi^{(m)}\|_{L^2(I)}^2+\|\psi^{(m)}\|_{L^2(I)}^2+\|\eta^{(m)}\|_{L^2(I)}^2+\|\xi^{(m)}\|_{L^2(I)}^2=\sum_{n=0}^{\infty}(|\alpha_n^{(m)}|^2+|\beta_n^{(m)}|^2+|\gamma_n^{(m)}|^2+|\delta_n^{(m)}|^2)$$

なので,

$$\sum_{n=0}^{\infty}(|\alpha_n^{(m)}|^2+|\beta_n^{(m)}|^2+|\gamma_n^{(m)}|^2+|\delta_n^{(m)}|^2)\le C\ (m\ge 1)$$

を示せばよい. ここで, $l\in\{0,1,2,\cdots\}$ に対して,

$$(D_1\varphi_{xx}^{(m)}-\chi_k^*\theta_1\psi_{xx}^{(m)}-\theta_1\varphi^{(m)},\phi_l)_{L^2(I)}=(-D_1\lambda_l-\theta_1)\alpha_l^{(m)}+\chi_k^*\theta_1\lambda_l\beta_l^{(m)}$$

が成り立ち, 補題 2.6 より,

$$\sum_{l=0}^{\infty}|(-D_1\lambda_l-\theta_1)\alpha_l^{(m)}+\chi_k^*\theta_1\lambda_l\beta_l^{(m)}|^2=\|D_1\varphi_{xx}^{(m)}-\chi_k^*\theta_1\psi_{xx}^{(m)}-\theta_1\varphi^{(m)}\|_{L^2(I)}^2\le C$$

を得る. また,

$$(D_2\psi_{xx}^{(m)}-\psi^{(m)}+\eta^{(m)},\phi_l)_{L^2(I)}=(-D_2\lambda_l-1)\beta_l^{(m)}+\gamma_l^{(m)}$$

が成り立ち, 補題 2.6 より,

$$\sum_{l=0}^{\infty}|(-D_2\lambda_l-1)\beta_l^{(m)}+\gamma_l^{(m)}|^2=\|(D_2\psi_{xx}^{(m)}-\psi^{(m)}+\eta^{(m)}\|_{L^2(I)}^2\le C$$

を得る. 同様の議論により,

$$\sum_{l=0}^{\infty}|(-D_3\lambda_l-\theta_2)\gamma_l^{(m)}+\chi_k^*\theta_2\lambda_l\delta_l^{(m)}|^2\le C,$$

$$\sum_{l=0}^{\infty}|(-D_4\lambda_l-1)\delta_l^{(m)}+\alpha_l^{(m)}|^2\le C$$

を得る. よって,

$$A_l(\chi_k^*):=\begin{pmatrix}-D_1\lambda_l-\theta_1 & \chi_k^*\theta_1\lambda_l & 0 & 0\\ 0 & -D_2\lambda_l-1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -D_3\lambda_l-\theta_2 & \chi_k^*\theta_2\lambda_l\\ 1 & 0 & 0 & -D_4\lambda_l-1\end{pmatrix}$$

として結局,

$$\sum_{l=0}^{\infty}\left\|A_l(\chi_k^*)\begin{pmatrix}\alpha_l^{(m)}\\ \beta_l^{(m)}\\ \gamma_l^{(m)}\\ \delta_l^{(m)}\end{pmatrix}\right\|^2\le C\ (m\ge 1) \tag{5.2}$$

を得る. また任意の $l\ne k$ に対して $A_l(\chi_k^*)$ は正則行列より, $l\ge 1$ に対して,

$$A_l(\chi_k^*)=\lambda_l\begin{pmatrix}-D_1-\frac{\theta_1}{\lambda_l} & \chi_k^*\theta_1 & 0 & 0\\ 0 & -D_2-\frac{1}{\lambda_l} & \frac{1}{\lambda_l} & 0\\ 0 & 0 & -D_3-\frac{\theta_2}{\lambda_l} & \chi_k^*\theta_2\\ \frac{1}{\lambda_l} & 0 & 0 & -D_4-\frac{1}{\lambda_l}\end{pmatrix}:=\lambda_l\tilde{A}_l(\chi_k^*)$$

として, $\frac{1}{\lambda_l}\to 0\ (l\to\infty)$ より, ある $l_0>k$ と, ある定数 $C_1>0$ が存在して, $l\ge l_0$ で

$$\|\tilde{A}_l(\chi_k^*)^{-1}\|\le C_1$$

すなわち,

$$\|A_l(\chi_k^*)^{-1}\|=\frac{1}{\lambda_l}\|\tilde{A}_l(\chi_k^*)^{-1}\|\le\frac{C_1}{\lambda_1}=\tilde{C_1}$$

を得る. よって,

$$\left\|\begin{pmatrix}\alpha_l^{(m)}\\ \beta_l^{(m)}\\ \gamma_l^{(m)}\\ \delta_l^{(m)}\end{pmatrix}\right\| \le \|A_l(\chi_k^*)^{-1}\| \left\| A_l(\chi_k^*)\begin{pmatrix}\alpha_l^{(m)}\\ \beta_l^{(m)}\\ \gamma_l^{(m)}\\ \delta_l^{(m)}\end{pmatrix}\right\|$$
$$\le \tilde{C}_1 \left\| A_l(\chi_k^*)\begin{pmatrix}\alpha_l^{(m)}\\ \beta_l^{(m)}\\ \gamma_l^{(m)}\\ \delta_l^{(m)}\end{pmatrix}\right\| \ (l \ge l_0)$$

を得る. また, $0 \le l \le l_0$ かつ $l \ne k$ なる l に対しては, ある定数 C_2 が存在して,

$$\|A_l(\chi_k^*)^{-1}\| \le C_2$$

が成り立つ. よって,

$$\left\|\begin{pmatrix}\alpha_l^{(m)}\\ \beta_l^{(m)}\\ \gamma_l^{(m)}\\ \delta_l^{(m)}\end{pmatrix}\right\| \le C_2 \left\| A_l(\chi_k^*)\begin{pmatrix}\alpha_l^{(m)}\\ \beta_l^{(m)}\\ \gamma_l^{(m)}\\ \delta_l^{(m)}\end{pmatrix}\right\| \ (0 \le l \le l_0)$$

を得る. また, $l = k$ に対しては,

$$N(A_k(\chi_k^*)) = c\begin{pmatrix}(D_2\lambda_k+1)(D_3\lambda_k+\theta_2)(D_4\lambda_k+1)\\ \chi_k^*\theta_2\lambda_k\\ \chi_k^*\theta_2\lambda_k(D_2\lambda_k+1)\\ (D_2\lambda_k+1)(D_3\lambda_k+\theta_2)\end{pmatrix}$$

より, $\begin{pmatrix}\alpha_k^{(m)}\\ \beta_k^{(m)}\\ \gamma_k^{(m)}\\ \delta_k^{(m)}\end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix}(D_2\lambda_k+1)(D_3\lambda_k+\theta_2)(D_4\lambda_k+1)\\ \chi_k^*\theta_2\lambda_k\\ \chi_k^*\theta_2\lambda_k(D_2\lambda_k+1)\\ (D_2\lambda_k+1)(D_3\lambda_k+\theta_2)\end{pmatrix}$ なる $\begin{pmatrix}\alpha_k^{(m)}\\ \beta_k^{(m)}\\ \gamma_k^{(m)}\\ \delta_k^{(m)}\end{pmatrix}$ をえらんでおくことで, ある定数 $\delta > 0$ が存在して,

$$\delta\left\|\begin{pmatrix}\alpha_k^{(m)}\\ \beta_k^{(m)}\\ \gamma_k^{(m)}\\ \delta_k^{(m)}\end{pmatrix}\right\| \le \left\| A_k(\chi_k^*)\begin{pmatrix}\alpha_k^{(m)}\\ \beta_k^{(m)}\\ \gamma_k^{(m)}\\ \delta_k^{(m)}\end{pmatrix}\right\|$$

が成り立つ. 以上より, (5.2) から, ある $\tilde{C}$ が存在して,

$$\sum_{l=0}^{\infty}\left\|\begin{pmatrix}\alpha_l^{(m)}\\ \beta_l^{(m)}\\ \gamma_l^{(m)}\\ \delta_l^{(m)}\end{pmatrix}\right\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty}(|\alpha_n^{(m)}|^2 + |\beta_n^{(m)}|^2 + |\gamma_n^{(m)}|^2 + |\delta_n^{(m)}|^2) \le \tilde{C} \ (m \ge 1)$$

が成り立つ. ■

step2. ある定数 $C > 0$ が存在して, 次が成り立つ.

$$\|\varphi^{(m)}\|_{H^2(I)} + \|\psi^{(m)}\|_{H^2(I)} + \|\eta^{(m)}\|_{H^2(I)} + \|\xi^{(m)}\|_{H^2(I)} \le C \ (m \ge 1)$$

証明.
step1. より, $\|\eta^{(m)}\|_{L^2(I)} \leq C,\ \|\varphi^{(m)}\|_{L^2(I)} \leq C$ を得るので, (5.1) より,

$$\|D_2\psi^{(m)}_{xx} - \psi^{(m)}\|_{L^2(I)} \leq C,$$

$$\|D_4\xi^{(m)}_{xx} - \xi^{(m)}\|_{L^2(I)} \leq C$$

を得る. よって,

$$\|\psi^{(m)}\|_{H^2(I)} \leq C',\ \|\xi^{(m)}\|_{H^2(I)} \leq C'$$

を得る. よって, (5.1) より,

$$\|D_1\varphi^{(m)}_{xx} - \theta_1\varphi^{(m)}\|_{L^2(I)} \leq C,$$

$$\|D_3\eta^{(m)}_{xx} - \theta_2\eta^{(m)}\|_{L^2(I)} \leq C$$

を得る. よって,

$$\|\varphi^{(m)}\|_{H^2(I)} \leq C',\ \|\eta^{(m)}\|_{H^2(I)} \leq C'$$

を得る. 以上より,

$$\|\varphi^{(m)}\|_{H^2(I)} + \|\psi^{(m)}\|_{H^2(I)} + \|\eta^{(m)}\|_{H^2(I)} + \|\xi^{(m)}\|_{H^2(I)} \leq C'\ (m \geq 1)$$

が成り立つ. ■

step3.

$$D_{\vec{u}}F(\bar{u}, \chi_k^*)(\varphi^{(m)}, \psi^{(m)}, \eta^{(m)}, \xi^{(m)}) \to (f, g, h, k)\ in\ Y^4\ (m \to \infty)$$

なる (f, g, h, k) に対して, 次が成り立つ.

$$(f, g, h, k) \in R(D_{\vec{u}}F(\bar{u}, \chi_k^*)).$$

証明.
step2. より, ある部分列と $\varphi, \psi, \eta, \xi \in H^2(I)$ が存在して,

$$\begin{cases} \varphi^{(m_j)} \rightharpoonup \varphi & in\ H^2(I) \\ \psi^{(m_j)} \rightharpoonup \psi & in\ H^2(I) \\ \eta^{(m_j)} \rightharpoonup \eta & in\ H^2(I) \\ \xi^{(m_j)} \rightharpoonup \xi & in\ H^2(I) \end{cases}$$

を得る. 補題 2.3 より,

$$\begin{cases} \varphi^{(m_j)} \to \varphi & in\ C^1(I) \\ \psi^{(m_j)} \to \psi & in\ C^1(I) \\ \eta^{(m_j)} \to \eta & in\ C^1(I) \\ \xi^{(m_j)} \to \xi & in\ C^1(I) \end{cases}$$

が成り立つ. $\varphi_x^{(m_j)}(0) = \varphi_x^{(m_j)}(L) = 0$ より, $\varphi_x(0) = \varphi_x(L) = 0$ などとなることから,

$$(\varphi, \psi, \eta, \xi) \in X^4$$

を得る. また, 任意の $\phi_1 \in H^1(I)$ に対して,

$$\int_I (D_1\varphi^{(m)}_{xx} - \chi_k^*\theta_1\psi^{(m)}_{xx} - \theta_1\varphi^{(m)})\phi_1 dx = -\int_I D_1\varphi^{(m)}_x(\phi_1)_x dx + \int_I \chi_k^*\theta_1\psi^{(m)}_x(\phi_1)_x dx - \int_I \theta_1\varphi^{(m)}\phi_1 dx$$

が成り立つので, $D_1\varphi_{xx}^{(m)} - \chi_k^*\theta_1\psi_{xx}^{(m)} - \theta_1\varphi^{(m)} \to f \ in \ L^2(I)$ より,

$$\int_I f\phi_1 dx = -\int_I D_1\varphi_x^{(m)}(\phi_1)_x dx + \int_I \chi_k^*\theta_1\psi_x^{(m)}(\phi_1)_x dx - \int_I \theta_1\varphi^{(m)}\phi_1 dx$$

を得る. よって,

$$D_1\varphi_{xx} - \chi_k^*\theta_1\psi_{xx} - \theta_1\varphi = f$$

を得る. 同様の議論により,

$$D_{\vec{u}}F(\bar{u},\chi_k^*)(\varphi,\psi,\eta,\xi) = (f,g,h,k)$$

を得る. よって,

$$(f,g,h,k) \in R(D_{\vec{u}}F(\bar{u},\chi_k^*))$$

が成り立つ. ■

以上より, $R(D_{\vec{u}}F(\bar{u},\chi_k^*))$ は閉部分空間である. よって仮定 3 が確かめられた.

仮定 4. $D_{\vec{u},\chi}F(\bar{u},\chi_k^*)x^* \notin R(D_{\vec{u}}F(\bar{u},\chi_k^*))$ となる $x^* \in N(D_{\vec{u}}F(\bar{u},\chi_k^*))$ が存在する.

$x^* \in N(D_{\vec{u}}F(\bar{u},\chi_k^*))$ として次をとる.

$$x^* = \begin{pmatrix} (D_2\lambda_k+1)(D_3\lambda_k+\theta_2)(D_4\lambda_k+1) \\ \chi_k^*\theta_2\lambda_k \\ \chi_k^*\theta_2\lambda_k(D_2\lambda_k+1) \\ (D_2\lambda_k+1)(D_3\lambda_k+\theta_2) \end{pmatrix} \cos(\frac{k\pi x}{L}).$$

$$\begin{aligned} D_{\vec{u},\chi}F(\bar{u},\chi_k^*)x^* &= \begin{pmatrix} 0 & \theta_1\lambda_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \theta_2\lambda_k \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (D_2\lambda_k+1)(D_3\lambda_k+\theta_2)(D_4\lambda_k+1) \\ \chi_k^*\theta_2\lambda_k \\ \chi_k^*\theta_2\lambda_k(D_2\lambda_k+1) \\ (D_2\lambda_k+1)(D_3\lambda_k+\theta_2) \end{pmatrix} \cos(\frac{k\pi x}{L}) \\ &= \begin{pmatrix} \chi_k^*\theta_1\theta_2\lambda_k^2 \\ 0 \\ \theta_2\lambda_k(D_2\lambda_k+1)(D_3\lambda_k+\theta_2) \\ 0 \end{pmatrix} \cos(\frac{k\pi x}{L}). \end{aligned}$$

ここで, $D_{\vec{u},\chi}F(\bar{u},\chi_k^*)x^* \in R(D_{\vec{u}}F(\bar{u},\chi_k^*))$ を仮定する. すなわち,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \chi_k^*\theta_1\theta_2\lambda_k^2 \\ 0 \\ \theta_2\lambda_k(D_2\lambda_k+1)(D_3\lambda_k+\theta_2) \\ 0 \end{pmatrix} \cos(\frac{k\pi x}{L}) &= \begin{pmatrix} D_1u_{xx} - \chi_k^*\theta_1 v_{xx} - \theta_1 u \\ D_2v_{xx} - u + w \\ D_3w_{xx} - \chi_k^*\theta_2 z_{xx} - \theta_2 w \\ D_4 z_{xx} - z + u \end{pmatrix} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \begin{pmatrix} -(D_1\lambda_l+\theta_1)a_l + \chi_k^*\theta_1\lambda_l b_l \\ -(D_2\lambda_l+1)b_l + c_l \\ -(D_3\lambda_l+\theta_2)c_l + \chi_k^*\theta_2\lambda_l d_l \\ a_l - (D_4\lambda_l+1)d_l \end{pmatrix} \cos(\tfrac{l\pi x}{L}) \end{aligned}$$

を満たす (a_l,b_l,c_l,d_l) が存在すると仮定する. 両辺に $\cos(\frac{k\pi x}{L})$ をかけて I 上積分して,

$$\begin{pmatrix} \chi_k^*\theta_1\theta_2\lambda_k^2 \\ 0 \\ \theta_2\lambda_k(D_2\lambda_k+1)(D_3\lambda_k+\theta_2) \\ 0 \end{pmatrix} = A_k(\chi_k^*) \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \\ d_k \end{pmatrix}$$

を得る. これが解 $\begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \\ d_k \end{pmatrix}$ をもつための条件として, $N({}^tA_k(\chi_k^*)) = c \begin{pmatrix} (D_2\lambda_k+1)(D_3\lambda_k+\theta_2) \\ \chi_k^*\theta_1\lambda_k(D_3\lambda_k+\theta_2) \\ \chi_k^*\theta_1\lambda_k \\ (D_1\lambda_k+\theta_1)(D_2\lambda_k+1)(D_3\lambda_k+\theta_2) \end{pmatrix}$

を用いて,

$$\begin{pmatrix} \chi_k^*\theta_1\theta_2\lambda_k^2 \\ 0 \\ \theta_2\lambda_k(D_2\lambda_k+1)(D_3\lambda_k+\theta_2) \\ 0 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} (D_2\lambda_k+1)(D_3\lambda_k+\theta_2) \\ \chi_k^*\theta_1\lambda_k(D_3\lambda_k+\theta_2) \\ \chi_k^*\theta_1\lambda_k \\ (D_1\lambda_k+\theta_1)(D_2\lambda_k+1)(D_3\lambda_k+\theta_2) \end{pmatrix}$$

を満たす必要がある. $k \geq 1$ のとき,

$$\chi_k^*\theta_1\theta_2\lambda_k^2(D_2\lambda_k+1)(D_3\lambda_k+\theta_2) + \chi_k^*\theta_1\theta_2\lambda_k^2(D_2\lambda_k+1)(D_3\lambda_k+\theta_2) > 0$$

より, これは矛盾. 以上より, $D_{\vec{u},\chi}F(\bar{u},\chi_k^*)x^* \notin R(D_{\vec{u}}F(\bar{u},\chi_k^*))$. よって仮定 4 が確かめられた.

以上より, 補題 2.7 を用いて, 定理 1.3 が示される. ■

6 定理 1.4 の証明

以後

$$\begin{pmatrix} \Lambda_k^{(1)} \\ \Lambda_k^{(2)} \\ \Lambda_k^{(3)} \\ \Lambda_k^{(4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (D_1\lambda_k+\theta_1) \\ (D_2\lambda_k+1) \\ (D_3\lambda_k+\theta_2) \\ (D_4\lambda_k+1) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} Q_k^{(1)} \\ Q_k^{(2)} \\ Q_k^{(3)} \\ Q_k^{(4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda_k^{(2)}\Lambda_k^{(3)}\Lambda_k^{(4)} \\ \chi_k^*\theta_2\lambda_k \\ \chi_k^*\theta_2\lambda_k\Lambda_k^{(2)} \\ \Lambda_k^{(2)}\Lambda_k^{(3)} \end{pmatrix}$$

とする. 定理 1.3 より,

$$\begin{cases} u_k(s,x) = \theta_1 + sQ_k^{(1)}\cos(\frac{k\pi x}{L}) + s^2\varphi_1 + s^3\varphi_2 + o(s^3) \\ v_k(s,x) = \theta_2 + sQ_k^{(2)}\cos(\frac{k\pi x}{L}) + s^2\psi_1 + s^3\psi_2 + o(s^3) \\ w_k(s,x) = \theta_2 + sQ_k^{(3)}\cos(\frac{k\pi x}{L}) + s^2\eta_1 + s^3\eta_2 + o(s^3) \\ z_k(s,x) = \theta_1 + sQ_k^{(4)}\cos(\frac{k\pi x}{L}) + s^2\xi_1 + s^3\xi_2 + o(s^3) \\ \chi_k^*(s) = \chi_k^* + K_2 s + K_3 s^2 + o(s^2) \end{cases} \tag{6.1}$$

と拡張できる. K_2, K_3 は定数である.

step1. $K_2 = 0$ を示す.

(6.1) を (1.2) の第一式に代入する.

$$D_1(u_k)_{xx} = -sD_1\lambda_kQ_k^{(1)}\cos(\frac{k\pi x}{L}) + s^2D_1(\varphi_1)_{xx} + s^3D_1(\varphi_2)_{xx} + o(s^3).$$

$$\begin{aligned} -\chi_k^*(u_k)_x(v_k)_x = &-\{\chi_k^* + K_2s + K_3s^2 + o(s^2)\} \\ &\times\{-s(\frac{k\pi}{L})Q_k^{(1)}\sin(\frac{k\pi x}{L}) + s^2(\varphi_1)_x + s^3(\varphi_2)_x + o(s^3)\} \\ &\times\{-s(\frac{k\pi}{L})Q_k^{(2)}\sin(\frac{k\pi x}{L}) + s^2(\psi_1)_x + s^3(\psi_2)_x + o(s^3)\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\chi_k^*u_k(v_k)_{xx} = &-\{\chi_k^* + K_2s + K_3s^2 + o(s^2)\} \\ &\times\{\theta_1 + sQ_k^{(1)}\cos(\frac{k\pi x}{L}) + s^2\varphi_1 + s^3\varphi_2 + o(s^3)\} \\ &\times\{-s\lambda_kQ_k^{(2)}\cos(\frac{k\pi x}{L}) + s^2(\psi_1)_{xx} + s^3(\psi_2)_{xx} + o(s^3)\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u_k(\theta_1-u_k) &= -\theta_1(u-\theta_1)-(u-\theta_1)^2\\ &= -\theta_1\{sQ_k^{(1)}\cos(\frac{k\pi x}{L})+s^2\varphi_1+s^3\varphi_2+o(s^3)\}\\ &\quad -\{sQ_k^{(1)}\cos(\frac{k\pi x}{L})+s^2\varphi_1+s^3\varphi_2+o(s^3)\}^2.\end{aligned}$$

以上より, (1.2) の第一式を s に関する方程式としたとき, 定数項は含まず, 一次の項の係数は,

$$-D_1\lambda_kQ_k^{(1)}\cos(\frac{k\pi x}{L})+\chi_k^*\theta_1\lambda_kQ_k^{(2)}\cos(\frac{k\pi x}{L})-\theta_1Q_k^{(1)}\cos(\frac{k\pi x}{L})=0.$$

二次の項の係数は,

$$\begin{aligned}D_1(\varphi_1)_{xx}-\chi_k^*\lambda_kQ_k^{(1)}Q_k^{(2)}\sin^2(\frac{k\pi x}{L})-\chi_k^*\theta_1(\psi_1)_{xx}+\chi_k^*\lambda_kQ_k^{(1)}Q_k^{(2)}\cos^2(\frac{k\pi x}{L})&\\ +K_2\theta_1\lambda_kQ_k^{(2)}\cos(\frac{k\pi x}{L})-\theta_1\varphi_1-(Q_k^{(1)})^2\cos^2(\frac{k\pi x}{L})&=0\end{aligned}$$

より,

$$K_2\theta_1\lambda_kQ_k^{(2)}\cos(\frac{k\pi x}{L})=-D_1(\varphi_1)_{xx}+\theta_1\varphi_1+\chi_k^*\theta_1(\psi_1)_{xx}-\chi_k^*\lambda_kQ_k^{(1)}Q_k^{(2)}\cos(\frac{2k\pi x}{L})+(Q_k^{(1)})^2\cos^2(\frac{k\pi x}{L}).$$

両辺に $\cos(\frac{k\pi x}{L})$ をかけて I 上積分して,

$$\frac{\theta_1\lambda_kQ_k^{(2)}L}{2}K_2=\Lambda_k^{(1)}\int_I\varphi_1\cos(\frac{k\pi x}{L})dx-\chi_k^*\theta_1\lambda_k\int_I\psi_1\cos(\frac{k\pi x}{L})dx \tag{6.2}$$

を得る. 同様の議論により (1.2) の第三式から,

$$\frac{\theta_2\lambda_kQ_k^{(4)}L}{2}K_2=\Lambda_k^{(3)}\int_I\eta_1\cos(\frac{k\pi x}{L})dx-\chi_k^*\theta_2\lambda_k\int_I\xi_1\cos(\frac{k\pi x}{L})dx \tag{6.3}$$

を得る. (6.2), (6.3) から K_2 を消去して,

$$\begin{aligned}&\theta_2\Lambda_k^{(1)}Q_k^{(4)}\int_I\varphi_1\cos(\frac{k\pi x}{L})dx-\chi_k^*\theta_1\theta_2\lambda_kQ_k^{(4)}\int_I\psi_1\cos(\frac{k\pi x}{L})dx\\ &-\theta_1\Lambda_k^{(3)}Q_k^{(2)}\int_I\eta_1\cos(\frac{k\pi x}{L})dx+\chi_k^*\theta_1\theta_2\lambda_kQ_k^{(2)}\int_I\xi_1\cos(\frac{k\pi x}{L})dx=0\end{aligned} \tag{6.4}$$

を得る. 次に, (6.1) を (1.2) の第二式に代入する.

$$D_2(v_k)_{xx}=-sD_2\lambda_kQ_k^{(2)}\cos(\frac{k\pi x}{L})+s^2D_2(\psi_1)_{xx}+s^3D_2(\psi_2)_{xx}+o(s^3).$$

$$-v_k=-\{\theta_2+sQ_k^{(2)}\cos(\frac{k\pi x}{L})+s^2\psi_1+s^3\psi_2+o(s^3)\}.$$

$$w_k=\theta_2+sQ_k^{(3)}\cos(\frac{k\pi x}{L})+s^2\eta_1+s^3\eta_2+o(s^3).$$

以上より, (1.2) の第二式を s に関する方程式としたとき, 定数項は,

$$-\theta_2+\theta_2=0.$$

一次の項の係数は,

$$-D_2\lambda_kQ_k^{(2)}\cos(\frac{k\pi x}{L})-Q_k^{(2)}\cos(\frac{k\pi x}{L})+Q_k^{(3)}\cos(\frac{k\pi x}{L})=0.$$

二次の項の係数は,

$$D_2(\psi_1)_{xx} - \psi_1 + \eta_1 = 0$$

より, 両辺に $\cos(\frac{k\pi x}{L})$ をかけて I 上積分して,

$$\int_I \eta_1 \cos(\frac{k\pi x}{L})dx - \Lambda_k^{(2)} \int_I \psi_1 \cos(\frac{k\pi x}{L})dx = 0 \tag{6.5}$$

を得る. 同様の議論により (1.2) の第四式から,

$$\int_I \varphi_1 \cos(\frac{k\pi x}{L})dx - \Lambda_k^{(4)} \int_I \xi_1 \cos(\frac{k\pi x}{L})dx = 0 \tag{6.6}$$

を得る. ここで, $(\varphi_1, \psi_1, \eta_1, \xi_1) \in (N(D_{(u,v,w,z)}F(\theta_1, \theta_2, \theta_2, \theta_1, \chi_k^*)))^\perp$ より,

$$\int_I (Q_k^{(1)}\varphi_1 + Q_k^{(2)}\psi_1 + Q_k^{(3)}\eta_1 + Q_k^{(4)}\xi_1) \cos(\frac{k\pi x}{L})dx = 0. \tag{6.7}$$

(6.4)-(6.7) から, 次の行列を得る.

$$\begin{pmatrix} Q_k^{(1)} & Q_k^{(2)} & Q_k^{(3)} & Q_k^{(4)} \\ 0 & -\Lambda_k^{(2)} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\Lambda_k^{(4)} \\ \theta_2\Lambda_k^{(1)}Q_k^{(4)} & -\chi_k^*\theta_1\theta_2\lambda_k Q_k^{(4)} & -\theta_1\Lambda_k^{(3)}Q_k^{(2)} & \chi_k^*\theta_1\theta_2\lambda_k Q_k^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \int_I \varphi_1 \cos(\frac{k\pi x}{L})dx \\ \int_I \psi_1 \cos(\frac{k\pi x}{L})dx \\ \int_I \eta_1 \cos(\frac{k\pi x}{L})dx \\ \int_I \xi_1 \cos(\frac{k\pi x}{L})dx \end{pmatrix} = 0.$$

係数行列の行列式は,

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} Q_k^{(1)} & Q_k^{(2)} & Q_k^{(3)} & Q_k^{(4)} \\ 0 & -\Lambda_k^{(2)} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\Lambda_k^{(4)} \\ \theta_2\Lambda_k^{(1)}Q_k^{(4)} & -\chi_k^*\theta_1\theta_2\lambda_k Q_k^{(4)} & -\theta_1\Lambda_k^{(3)}Q_k^{(2)} & \chi_k^*\theta_1\theta_2\lambda_k Q_k^{(2)} \end{vmatrix} \\ &= Q_k^{(1)} \begin{vmatrix} -\Lambda_k^{(2)} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\Lambda_k^{(4)} \\ -\chi_k^*\theta_1\theta_2\lambda_k Q_k^{(4)} & -\theta_1\Lambda_k^{(3)}Q_k^{(2)} & \chi_k^*\theta_1\theta_2\lambda_k Q_k^{(2)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} Q_k^{(2)} & Q_k^{(3)} & Q_k^{(4)} \\ -\Lambda_k^{(2)} & 1 & 0 \\ -\chi_k^*\theta_1\theta_2\lambda_k Q_k^{(4)} & -\theta_1\Lambda_k^{(3)}Q_k^{(2)} & \chi_k^*\theta_1\theta_2\lambda_k Q_k^{(2)} \end{vmatrix} \\ &- \theta_2\Lambda_k^{(1)}Q_k^{(4)} \begin{vmatrix} Q_k^{(2)} & Q_k^{(3)} & Q_k^{(4)} \\ -\Lambda_k^{(2)} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\Lambda_k^{(4)} \end{vmatrix} \\ &= \theta_1\Lambda_k^{(2)}\Lambda_k^{(3)}\Lambda_k^{(4)}Q_k^{(1)}Q_k^{(2)} + \chi_k^*\theta_1\theta_2\lambda_k\Lambda_k^{(4)}Q_k^{(1)}Q_k^{(4)} + \chi_k^*\theta_1\theta_2\lambda_k(Q_k^{(2)})^2 + \chi_k^*\theta_1\theta_2\lambda_k\Lambda_k^{(2)}Q_k^{(2)}Q_k^{(3)} \\ &+ \theta_1\Lambda_k^{(2)}\Lambda_k^{(3)}Q_k^{(2)}Q_k^{(4)} + \chi_k^*\theta_1\theta_2\lambda_k(Q_k^{(4)})^2 + \theta_2\Lambda_k^{(1)}\Lambda_k^{(4)}Q_k^{(2)}Q_k^{(4)} + \theta_2\Lambda_k^{(1)}\Lambda_k^{(2)}\Lambda_k^{(4)}Q_k^{(3)}Q_k^{(4)} \\ &\neq 0. \end{aligned}$$

すなわち, 係数行列は正則行列で,

$$\begin{pmatrix} \int_I \varphi_1 \cos(\frac{k\pi x}{L})dx \\ \int_I \psi_1 \cos(\frac{k\pi x}{L})dx \\ \int_I \eta_1 \cos(\frac{k\pi x}{L})dx \\ \int_I \xi_1 \cos(\frac{k\pi x}{L})dx \end{pmatrix} = 0$$

を得る. これを (6.2) に代入して, $K_2 = 0$ を得る.

step2. K_3 の値を示す.

(6.1) を (1.2) の第一式の代入して s に関する方程式としたとき, 三次の項の係数は,

$$D_1(\varphi_2)_{xx}+\chi_k(\frac{k\pi}{L})Q_k^{(1)}(\psi_1)_x\sin(\frac{k\pi x}{L})+\chi_k(\frac{k\pi}{L})Q_k^{(2)}(\varphi_1)_x\sin(\frac{k\pi x}{L})-\chi_k\theta_1(\psi_2)_{xx}$$
$$-\chi_kQ_k^{(1)}(\psi_1)_{xx}\cos(\frac{k\pi x}{L})+\chi_k\lambda_kQ_k^{(2)}\varphi_1\cos(\frac{k\pi x}{L})+\theta_1\lambda_kQ_k^{(2)}K_3\cos(\frac{k\pi x}{L})-\theta_1\varphi_2-2Q_k^{(1)}\varphi_1\cos(\frac{k\pi x}{L})=0.$$

両辺に $\cos(\frac{k\pi x}{L})$ をかけて I 上積分して,

$$\begin{aligned}\frac{\theta_1\lambda_kQ_k^{(2)}L}{2}K_3=&\Lambda_k^{(1)}\int_I\varphi_2\cos(\frac{k\pi x}{L})dx-\chi_k\theta_1\lambda_k\int_I\psi_2\cos(\frac{k\pi x}{L})dx+(Q_k^{(1)}-\frac{1}{2}\chi_k\lambda_kQ_k^{(2)})\int_I\varphi_1dx\\&+\ (Q_k^{(1)}+\frac{1}{2}\chi_k\lambda_kQ_k^{(2)})\int_I\varphi_1\cos(\frac{2k\pi x}{L})dx-\chi_k\lambda_kQ_k^{(1)}\int_I\psi_1\cos(\frac{2k\pi x}{L})dx\end{aligned}\tag{6.8}$$

を得る. 同様の議論により (1.2) の第三式から,

$$\begin{aligned}\frac{\theta_2\lambda_kQ_k^{(4)}L}{2}K_3=&\Lambda_k^{(3)}\int_I\eta_2\cos(\frac{k\pi x}{L})dx-\chi_k\theta_2\lambda_k\int_I\xi_2\cos(\frac{k\pi x}{L})dx+(Q_k^{(3)}-\frac{1}{2}\chi_k\lambda_kQ_k^{(4)})\int_I\eta_1dx\\&+\ (Q_k^{(3)}+\frac{1}{2}\chi_k\lambda_kQ_k^{(4)})\int_I\eta_1\cos(\frac{2k\pi x}{L})dx-\chi_k\lambda_kQ_k^{(3)}\int_I\xi_1\cos(\frac{2k\pi x}{L})dx\end{aligned}\tag{6.9}$$

を得る. (6.8), (6.9) から K_3 を消去して,

$$\begin{aligned}&\theta_2\Lambda_k^{(1)}Q_k^{(4)}\int_I\varphi_2\cos(\frac{k\pi x}{L})dx-\chi_k\theta_1\theta_2\lambda_kQ_k^{(4)}\int_I\psi_2\cos(\frac{k\pi x}{L})dx\\&-\ \theta_1\Lambda_k^{(3)}Q_k^{(2)}\int_I\eta_2\cos(\frac{k\pi x}{L})dx+\chi_k\theta_1\theta_2\lambda_kQ_k^{(2)}\int_I\xi_2\cos(\frac{k\pi x}{L})dx\\&=\ -\theta_2Q_k^{(4)}(Q_k^{(1)}-\frac{1}{2}\chi_k\lambda_kQ_k^{(2)})\int_I\varphi_1dx-\theta_2Q_k^{(4)}(Q_k^{(1)}+\frac{1}{2}\chi_k\lambda_kQ_k^{(2)})\int_I\varphi_1\cos(\frac{2k\pi x}{L})dx\\&+\ \chi_k\theta_2\lambda_kQ_k^{(1)}Q_k^{(4)}\int_I\psi_1\cos(\frac{2k\pi x}{L})dx+\theta_1Q_k^{(2)}(Q_k^{(3)}-\frac{1}{2}\chi_k\lambda_kQ_k^{(4)})\int_I\eta_1dx\\&+\ \theta_1Q_k^{(2)}(Q_k^{(3)}+\frac{1}{2}\chi_k\lambda_kQ_k^{(4)})\int_I\eta_1\cos(\frac{2k\pi x}{L})dx-\chi_k\theta_1\lambda_kQ_k^{(2)}Q_k^{(3)}\int_I\xi_1\cos(\frac{2k\pi x}{L})dx\end{aligned}\tag{6.10}$$

を得る. まず, $(\int_I\varphi_2\cos(\frac{k\pi x}{L})dx,\ \int_I\psi_2\cos(\frac{k\pi x}{L})dx,\ \int_I\eta_2\cos(\frac{k\pi x}{L})dx,\ \int_I\xi_2\cos(\frac{k\pi x}{L})dx)$ の値を求める.

$$\begin{aligned}\alpha=&-\theta_2Q_k^{(4)}(Q_k^{(1)}-\frac{1}{2}\chi_k\lambda_kQ_k^{(2)})\int_I\varphi_1dx-\theta_2Q_k^{(4)}(Q_k^{(1)}+\frac{1}{2}\chi_k\lambda_kQ_k^{(2)})\int_I\varphi_1\cos(\frac{2k\pi x}{L})dx\\&+\chi_k\theta_2\lambda_kQ_k^{(1)}Q_k^{(4)}\int_I\psi_1\cos(\frac{2k\pi x}{L})dx+\theta_1Q_k^{(2)}(Q_k^{(3)}-\frac{1}{2}\chi_k\lambda_kQ_k^{(4)})\int_I\eta_1dx\\&+\theta_1Q_k^{(2)}(Q_k^{(3)}+\frac{1}{2}\chi_k\lambda_kQ_k^{(4)})\int_I\eta_1\cos(\frac{2k\pi x}{L})dx-\chi_k\theta_1\lambda_kQ_k^{(2)}Q_k^{(3)}\int_I\xi_1\cos(\frac{2k\pi x}{L})dx\end{aligned}$$

とする. (6.1) を (1.2) の第二式に代入して s に関する方程式としたとき, 三次の項の係数は,

$$D_2(\psi_2)_{xx}-\psi_2+\eta_2=0$$

より, 両辺に $\cos(\frac{k\pi x}{L})$ をかけて I 上積分して,

$$-\Lambda_k^{(2)}\int_I\psi_2\cos(\frac{k\pi x}{L})dx+\int_I\eta_2\cos(\frac{k\pi x}{L})dx=0\tag{6.11}$$

を得る. 同様の議論により (1.2) の第四式から,

$$\int_I \varphi_2 \cos(\frac{k\pi x}{L})dx - \Lambda_k^{(4)} \int_I \xi_2 \cos(\frac{k\pi x}{L})dx = 0 \tag{6.12}$$

を得る. ここで, $(\varphi_2, \psi_2, \eta_2, \xi_2) \in (N(D_{(u,v,w,z)}F(\theta_1, \theta_2, \theta_2, \theta_1, \chi_k^*)))^\perp$ より,

$$\int_I (Q_k^{(1)}\varphi_2 + Q_k^{(2)}\psi_2 + Q_k^{(3)}\eta_2 + Q_k^{(4)}\xi_2)\cos(\frac{k\pi x}{L})dx = 0. \tag{6.13}$$

(6.10)-(6.13) から, 次の行列を得る.

$$\begin{pmatrix} Q_k^{(1)} & Q_k^{(2)} & Q_k^{(3)} & Q_k^{(4)} \\ 0 & -\Lambda_k^{(2)} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\Lambda_k^{(4)} \\ \theta_2\Lambda_k^{(1)}Q_k^{(4)} & -\chi_k\theta_1\theta_2\lambda_k Q_k^{(4)} & -\theta_1\Lambda_k^{(3)}Q_k^{(2)} & \chi_k\theta_1\theta_2\lambda_k Q_k^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \int_I \varphi_2\cos(\frac{k\pi x}{L})dx \\ \int_I \psi_2\cos(\frac{k\pi x}{L})dx \\ \int_I \eta_2\cos(\frac{k\pi x}{L})dx \\ \int_I \xi_2\cos(\frac{k\pi x}{L})dx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}.$$

ここで,

$$B_k = \begin{pmatrix} Q_k^{(1)} & Q_k^{(2)} & Q_k^{(3)} & Q_k^{(4)} \\ 0 & -\Lambda_k^{(2)} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\Lambda_k^{(4)} \\ \theta_2\Lambda_k^{(1)}Q_k^{(4)} & -\chi_k\theta_1\theta_2\lambda_k Q_k^{(4)} & -\theta_1\Lambda_k^{(3)}Q_k^{(2)} & \chi_k\theta_1\theta_2\lambda_k Q_k^{(2)} \end{pmatrix}$$

として,

$$\begin{aligned} |B_k| &= Q_k^{(1)} \begin{vmatrix} -\Lambda_k^{(2)} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\Lambda_k^{(4)} \\ -\chi_k\theta_1\theta_2\lambda_k Q_k^{(4)} & -\theta_1\Lambda_k^{(3)}Q_k^{(2)} & \chi_k\theta_1\theta_2\lambda_k Q_k^{(2)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} Q_k^{(2)} & Q_k^{(3)} & Q_k^{(4)} \\ -\Lambda_k^{(2)} & 1 & 0 \\ -\chi_k\theta_1\theta_2\lambda_k Q_k^{(4)} & -\theta_1\Lambda_k^{(3)}Q_k^{(2)} & \chi_k\theta_1\theta_2\lambda_k Q_k^{(2)} \end{vmatrix} \\ &- \theta_2\Lambda_k^{(1)}Q_k^{(4)} \begin{vmatrix} Q_k^{(2)} & Q_k^{(3)} & Q_k^{(4)} \\ -\Lambda_k^{(2)} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\Lambda_k^{(4)} \end{vmatrix} \\ &= \theta_1\Lambda_k^{(2)}\Lambda_k^{(3)}\Lambda_k^{(4)}Q_k^{(1)}Q_k^{(2)} + \chi_k\theta_1\theta_2\lambda_k\Lambda_k^{(4)}Q_k^{(1)}Q_k^{(4)} + \chi_k\theta_1\theta_2\lambda_k(Q_k^{(2)})^2 + \chi_k\theta_1\theta_2\lambda_k\Lambda_k^{(2)}Q_k^{(2)}Q_k^{(3)} \\ &+ \theta_1\Lambda_k^{(2)}\Lambda_k^{(3)}Q_k^{(2)}Q_k^{(4)} + \chi_k\theta_1\theta_2\lambda_k(Q_k^{(4)})^2 + \theta_2\Lambda_k^{(1)}\Lambda_k^{(4)}Q_k^{(2)}Q_k^{(4)} + \theta_2\Lambda_k^{(1)}\Lambda_k^{(2)}\Lambda_k^{(4)}Q_k^{(3)}Q_k^{(4)} \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

かつ,

$$B_k^{-1} = \frac{1}{|B_k|}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{pmatrix},$$

$$b_{11} = \theta_1\Lambda_k^{(2)}\Lambda_k^{(3)}\Lambda_k^{(4)}Q_k^{(2)} + \chi_k\theta_1\theta_2\lambda_k\Lambda_k^{(4)}Q_k^{(4)},\ b_{12} = \theta_1\Lambda_k^{(3)}\Lambda_k^{(4)}(Q_k^{(2)})^2 - \chi_k\theta_1\theta_2\lambda_k\Lambda_k^{(4)}Q_k^{(3)}Q_k^{(4)},$$

$$b_{13} = \chi_k\theta_1\theta_2\lambda_k Q_k^{(2)}(Q_k^{(2)}+\Lambda_k^{(2)}Q_k^{(3)})+Q_k^{(4)}(\theta_1\Lambda_k^{(2)}\Lambda_k^{(3)}Q_k^{(2)}+\chi_k\theta_1\theta_2\lambda_k Q_k^{(4)}),\ b_{14} = \Lambda_k^{(4)}Q_k^{(2)}+\Lambda_k^{(2)}\Lambda_k^{(4)}Q_k^{(3)},$$

$$b_{21} = \chi_k\theta_1\theta_2\lambda_k Q_k^{(2)}+\theta_2\Lambda_k^{(1)}\Lambda_k^{(4)}Q_k^{(4)},\ b_{22} = -\theta_1\Lambda_k^{(3)}Q_k^{(2)}(\Lambda_k^{(4)}Q_k^{(1)}+Q_k^{(4)})-Q_k^{(3)}(\chi_k\theta_1\theta_2\lambda_k Q_k^{(2)}+\theta_2\Lambda_k^{(1)}\Lambda_k^{(4)}Q_k^{(4)}),$$

$$b_{23} = -\chi_k\theta_1\theta_2\lambda_k Q_k^{(1)}Q_k^{(2)} + \theta_2\Lambda_k^{(1)}(Q_k^{(4)})^2,\ b_{24} = -\Lambda_k^{(4)}Q_k^{(1)} - Q_k^{(4)},$$

$$b_{31} = \chi_k\theta_1\theta_2\lambda_k\Lambda_k^{(2)}Q_k^{(2)}+\theta_2\Lambda_k^{(1)}\Lambda_k^{(2)}\Lambda_k^{(4)}Q_k^{(4)},\ b_{32} = Q_k^{(2)}(\chi_k\theta_1\theta_2\lambda_k Q_k^{(2)}+\theta_2\Lambda_k^{(1)}\Lambda_k^{(4)}Q_k^{(4)})+\chi_k\theta_1\theta_2\lambda_k Q_k^{(4)}(\Lambda_k^{(4)}Q_k^{(1)}+Q_k^{(4)}),$$

$$b_{33}=-\chi_k\theta_1\theta_2\lambda_k\Lambda_k^{(2)}Q_k^{(1)}Q_k^{(2)}+\theta_2\Lambda_k^{(1)}\Lambda_k^{(2)}(Q_k^{(4)})^2,\ b_{34}=-\Lambda_k^{(2)}\Lambda_k^{(4)}Q_k^{(1)}-\Lambda_k^{(2)}Q_k^{(4)},$$
$$b_{41}=\theta_1\Lambda_k^{(2)}\Lambda_k^{(3)}Q_k^{(2)}+\chi_k\theta_1\theta_2\lambda_kQ_k^{(4)},\ b_{42}=\theta_1\Lambda_k^{(3)}(Q_k^{(2)})^2-\chi_k\theta_1\theta_2\lambda_kQ_k^{(3)}Q_k^{(4)},$$
$$b_{43}=-Q_k^{(1)}(\theta_1\Lambda_k^{(2)}\Lambda_k^{(3)}Q_k^{(2)}+\chi_k\theta_1\theta_2\lambda_kQ_k^{(4)})-\theta_2\Lambda_k^{(1)}Q_k^{(4)}(Q_k^{(2)}+\Lambda_k^{(2)}Q_k^{(3)}),\ b_{44}=Q_k^{(2)}+\Lambda_k^{(2)}Q_k^{(3)}$$

より,

$$\begin{pmatrix}\int_I\varphi_2\cos(\frac{k\pi x}{L})dx\\ \int_I\psi_2\cos(\frac{k\pi x}{L})dx\\ \int_I\eta_2\cos(\frac{k\pi x}{L})dx\\ \int_I\xi_2\cos(\frac{k\pi x}{L})dx\end{pmatrix}=B_k^{-1}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\\alpha\end{pmatrix}=\frac{\alpha}{|B_k|}\begin{pmatrix}\Lambda_k^{(4)}Q_k^{(2)}+\Lambda_k^{(2)}\Lambda_k^{(4)}Q_k^{(3)}\\ -\Lambda_k^{(4)}Q_k^{(1)}-Q_k^{(4)}\\ -\Lambda_k^{(2)}\Lambda_k^{(4)}Q_k^{(1)}-\Lambda_k^{(2)}Q_k^{(4)}\\ Q_k^{(2)}+\Lambda_k^{(2)}Q_k^{(3)}\end{pmatrix}\tag{6.14}$$

を得る. 次に, $(\int_I\varphi_1\cos(\frac{2k\pi x}{L})dx,\ \int_I\psi_1\cos(\frac{2k\pi x}{L})dx,\ \int_I\eta_1\cos(\frac{2k\pi x}{L})dx,\ \int_I\xi_1\cos(\frac{2k\pi x}{L})dx)$ の値を求める. (6.1) を (1.2) の第一式に代入して s に関する方程式としたときの二次の項の係数

$$\begin{aligned}D_1(\varphi_1)_{xx}-\chi_k^*\lambda_kQ_k^{(1)}Q_k^{(2)}\sin^2(\frac{k\pi x}{L})-\chi_k^*\theta_1(\psi_1)_{xx}&\\ +\chi_k^*\lambda_kQ_k^{(1)}Q_k^{(2)}\cos^2(\frac{k\pi x}{L})-\theta_1\varphi_1-(Q_k^{(1)})^2\cos^2(\frac{k\pi x}{L})&=0\end{aligned}\tag{6.15}$$

の両辺に $\cos(\frac{2k\pi x}{L})$ をかけて I 上積分して,

$$-\Lambda_{2k}^{(1)}\int_I\varphi_1\cos(\frac{2k\pi x}{L})dx+\chi_k^*\theta_1\lambda_{2k}\int_I\psi_1\cos(\frac{2k\pi x}{L})dx=\frac{Q_k^{(1)}L}{4}(Q_k^{(1)}-2\chi_k^*\lambda_kQ_k^{(2)})\tag{6.16}$$

を得る. 同様の議論により (1.2) の第三式から,

$$-\Lambda_{2k}^{(3)}\int_I\eta_1\cos(\frac{2k\pi x}{L})dx+\chi_k^*\theta_2\lambda_{2k}\int_I\xi_1\cos(\frac{2k\pi x}{L})dx=\frac{Q_k^{(3)}L}{4}(Q_k^{(3)}-2\chi_k^*\lambda_kQ_k^{(4)})\tag{6.17}$$

を得る. 次に, (6.1) を (1.2) の第二式に代入して s に関する方程式としたときの二次の項の係数

$$D_2(\psi_1)_{xx}-\psi_1+\eta_1=0$$

の両辺に $\cos(\frac{2k\pi x}{L})$ をかけて I 上積分して,

$$-\Lambda_{2k}^{(2)}\int_I\psi_1\cos(\frac{2k\pi x}{L})dx+\int_I\eta_1\cos(\frac{2k\pi x}{L})dx=0\tag{6.18}$$

を得る. 同様の議論により (1.2) の第四式から,

$$\int_I\varphi_1\cos(\frac{2k\pi x}{L})dx-\Lambda_{2k}^{(4)}\int_I\xi_1\cos(\frac{2k\pi x}{L})dx=0\tag{6.19}$$

を得る. (6.16)-(6.19) から, 次の行列を得る.

$$\begin{pmatrix}-\Lambda_{2k}^{(1)}&\chi_k^*\theta_1\lambda_{2k}&0&0\\0&-\Lambda_{2k}^{(2)}&1&0\\0&0&-\Lambda_{2k}^{(3)}&\chi_k^*\theta_2\lambda_{2k}\\1&0&0&-\Lambda_{2k}^{(4)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\int_I\varphi_1\cos(\frac{2k\pi x}{L})dx\\ \int_I\psi_1\cos(\frac{2k\pi x}{L})dx\\ \int_I\eta_1\cos(\frac{2k\pi x}{L})dx\\ \int_I\xi_1\cos(\frac{2k\pi x}{L})dx)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{Q_k^{(1)}L}{4}(Q_k^{(1)}-2\chi_k^*\lambda_kQ_k^{(2)})\\0\\ \frac{Q_k^{(3)}L}{4}(Q_k^{(3)}-2\chi_k^*\lambda_kQ_k^{(4)})\\0\end{pmatrix}.$$

ここで,

$$C_k=\begin{pmatrix}-\Lambda_{2k}^{(1)}&\chi_k^*\theta_1\lambda_{2k}&0&0\\0&-\Lambda_{2k}^{(2)}&1&0\\0&0&-\Lambda_{2k}^{(3)}&\chi_k^*\theta_2\lambda_{2k}\\1&0&0&-\Lambda_{2k}^{(4)}\end{pmatrix}$$

として,

$$
\begin{aligned}
|C_k| &= -\Lambda_{2k}^{(1)} \begin{vmatrix} -\Lambda_{2k}^{(2)} & 1 & 0 \\ 0 & -\Lambda_{2k}^{(3)} & \chi_k^* \theta_2 \lambda_{2k} \\ 0 & 0 & -\Lambda_{2k}^{(4)} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \chi_k^* \theta_1 \lambda_{2k} & 0 & 0 \\ -\Lambda_{2k}^{(2)} & 1 & 0 \\ 0 & -\Lambda_{2k}^{(3)} & \chi_k^* \theta_2 \lambda_{2k} \end{vmatrix} \\
&= \Lambda_{2k}^{(1)} \Lambda_{2k}^{(2)} \Lambda_{2k}^{(3)} \Lambda_{2k}^{(4)} - (\chi_k^*)^2 \theta_1 \theta_2 \lambda_{2k}^2 \\
&\neq 0
\end{aligned}
$$

かつ,

$$
C_k^{-1} = -\frac{1}{|C_k|} \begin{pmatrix} \Lambda_{2k}^{(2)} \Lambda_{2k}^{(3)} \Lambda_{2k}^{(4)} & \chi_k^* \theta_1 \lambda_{2k} \Lambda_{2k}^{(3)} \Lambda_{2k}^{(4)} & \chi_k^* \theta_1 \lambda_{2k} \Lambda_{2k}^{(4)} & (\chi_k^*)^2 \theta_1 \theta_2 \lambda_{2k}^2 \\ \chi_k^* \theta_2 \lambda_{2k} & \Lambda_{2k}^{(1)} \Lambda_{2k}^{(3)} \Lambda_{2k}^{(4)} & \Lambda_{2k}^{(1)} \Lambda_{2k}^{(4)} & \chi_k^* \theta_2 \lambda_{2k} \Lambda_{2k}^{(1)} \\ \chi_k^* \theta_2 \lambda_{2k} \Lambda_{2k}^{(2)} & (\chi_k^*)^2 \theta_1 \theta_2 \lambda_{2k}^2 & \Lambda_{2k}^{(1)} \Lambda_{2k}^{(2)} \Lambda_{2k}^{(4)} & \chi_k^* \theta_2 \lambda_{2k} \Lambda_{2k}^{(1)} \Lambda_{2k}^{(2)} \\ \Lambda_{2k}^{(2)} \Lambda_{2k}^{(3)} & \chi_k^* \theta_2 \lambda_{2k} \Lambda_{2k}^{(3)} & \chi_k^* \theta_1 \lambda_{2k} & \Lambda_{2k}^{(1)} \Lambda_{2k}^{(2)} \Lambda_{2k}^{(3)} \end{pmatrix}
$$

より,

$$
\begin{pmatrix} \int_I \varphi_1 \cos(\frac{2k\pi x}{L}) dx \\ \int_I \psi_1 \cos(\frac{2k\pi x}{L}) dx \\ \int_I \eta_1 \cos(\frac{2k\pi x}{L}) dx \\ \int_I \xi_1 \cos(\frac{2k\pi x}{L}) dx) \end{pmatrix} = -\frac{L}{4|C_k|} \begin{pmatrix} \Lambda_{2k}^{(2)} \Lambda_{2k}^{(3)} \Lambda_{2k}^{(4)} Q_k^{(1)} (Q_k^{(1)} - 2\chi_k^* \lambda_k Q_k^{(2)}) + \chi_k^* \theta_1 \lambda_{2k} \Lambda_{2k}^{(4)} Q_k^{(3)} (Q_k^{(3)} - 2\chi_k^* \lambda_k Q_k^{(4)}) \\ \chi_k^* \theta_2 \lambda_{2k} Q_k^{(1)} (Q_k^{(1)} - 2\chi_k^* \lambda_k Q_k^{(2)}) + \Lambda_{2k}^{(1)} \Lambda_{2k}^{(4)} Q_k^{(3)} (Q_k^{(3)} - 2\chi_k^* \lambda_k Q_k^{(4)}) \\ \chi_k^* \theta_2 \lambda_{2k} \Lambda_{2k}^{(2)} Q_k^{(1)} (Q_k^{(1)} - 2\chi_k^* \lambda_k Q_k^{(2)}) + \Lambda_{2k}^{(1)} \Lambda_{2k}^{(2)} \Lambda_{2k}^{(4)} Q_k^{(3)} (Q_k^{(3)} - 2\chi_k^* \lambda_k Q_k^{(4)}) \\ \Lambda_{2k}^{(2)} \Lambda_{2k}^{(3)} Q_k^{(1)} (Q_k^{(1)} - 2\chi_k^* \lambda_k Q_k^{(2)}) + \chi_k^* \theta_1 \lambda_{2k} Q_k^{(3)} (Q_k^{(3)} - 2\chi_k^* \lambda_k Q_k^{(4)}) \end{pmatrix} \tag{6.20}
$$

を得る. また, (6.15) を I 上積分して,

$$
\int_I \varphi_1 dx = -\frac{(Q_k^{(1)})^2 L}{2\theta_1} \tag{6.21}
$$

を得る. 同様の議論により,

$$
\int_I \eta_1 dx = -\frac{(Q_k^{(3)})^2 L}{2\theta_2}
$$

を得る. 以上より, (6.14), (6.20), (6.21) を (6.8) に代入して, 次の K_3 の値を得る.

$$
\begin{aligned}
\frac{\theta_1 \lambda_k Q_k^{(2)} L}{2} K_3 &= \frac{\alpha \Lambda_k^{(1)} \Lambda_k^{(4)}}{|B_k|} (Q_k^{(2)} + \Lambda_k^{(2)} Q_k^{(3)}) + \frac{\alpha \chi_k \theta_1 \lambda_k}{|B_k|} (\Lambda_k^{(4)} Q_k^{(1)} + Q_k^{(4)}) - \frac{(Q_k^{(1)})^2 L}{2\theta_1} (Q_k^{(1)} - \frac{1}{2} \chi_k \lambda_k Q_k^{(2)}) \\
&- \frac{L}{4|C_k|} (Q_k^{(1)} + \frac{1}{2} \chi_k \lambda_k Q_k^{(2)}) \{\Lambda_{2k}^{(2)} \Lambda_{2k}^{(3)} \Lambda_{2k}^{(4)} Q_k^{(1)} (Q_k^{(1)} - 2\chi_k^* \lambda_k Q_k^{(2)}) + \chi_k^* \theta_1 \lambda_{2k} \Lambda_{2k}^{(4)} Q_k^{(3)} (Q_k^{(3)} - 2\chi_k^* \lambda_k Q_k^{(4)})\} \\
&+ \frac{\chi_k \lambda_k Q_k^{(1)} L}{4|C_k|} \{\chi_k^* \theta_2 \lambda_{2k} Q_k^{(1)} (Q_k^{(1)} - 2\chi_k^* \lambda_k Q_k^{(2)}) + \Lambda_{2k}^{(1)} \Lambda_{2k}^{(4)} Q_k^{(3)} (Q_k^{(3)} - 2\chi_k^* \lambda_k Q_k^{(4)})\}.
\end{aligned}
$$

ここで,

$$
\begin{aligned}
\alpha &= \frac{\theta_2 (Q_k^{(1)})^2 Q_k^{(4)} L}{2\theta_1}(Q_k^{(1)} - \frac{1}{2}\chi_k \lambda_k Q_k^{(2)}) \\
&+ \frac{\theta_2 Q_k^{(4)} L}{4|C_k|}(Q_k^{(1)} + \frac{1}{2}\chi_k \lambda_k Q_k^{(2)})\{\Lambda_{2k}^{(2)}\Lambda_{2k}^{(3)}\Lambda_{2k}^{(4)} Q_k^{(1)}(Q_k^{(1)} - 2\chi_k^* \lambda_k Q_k^{(2)}) + \chi_k^* \theta_1 \lambda_{2k} \Lambda_{2k}^{(4)} Q_k^{(3)}(Q_k^{(3)} - 2\chi_k^* \lambda_k Q_k^{(4)})\} \\
&- \frac{\chi_k \theta_2 \lambda_k Q_k^{(1)} Q_k^{(4)} L}{4|C_k|}\{\chi_k^* \theta_2 \lambda_{2k} Q_k^{(1)}(Q_k^{(1)} - 2\chi_k^* \lambda_k Q_k^{(2)}) + \Lambda_{2k}^{(1)}\Lambda_{2k}^{(4)} Q_k^{(3)}(Q_k^{(3)} - 2\chi_k^* \lambda_k Q_k^{(4)})\} \\
&- \frac{\theta_1 Q_k^{(2)} (Q_k^{(3)})^2 L}{2\theta_2}(Q_k^{(3)} - \frac{1}{2}\chi_k \lambda_k Q_k^{(4)}) \\
&- \frac{\theta_1 Q_k^{(2)} L}{4|C_k|}(Q_k^{(3)} + \frac{1}{2}\chi_k \lambda_k Q_k^{(4)})\{\chi_k^* \theta_2 \lambda_{2k} \Lambda_{2k}^{(2)} Q_k^{(1)}(Q_k^{(1)} - 2\chi_k^* \lambda_k Q_k^{(2)}) + \Lambda_{2k}^{(1)}\Lambda_{2k}^{(2)}\Lambda_{2k}^{(4)} Q_k^{(3)}(Q_k^{(3)} - 2\chi_k^* \lambda_k Q_k^{(4)})\} \\
&+ \frac{\chi_k \theta_1 \lambda_k Q_k^{(2)} Q_k^{(3)} L}{4|C_k|}\{\Lambda_{2k}^{(2)}\Lambda_{2k}^{(3)} Q_k^{(1)}(Q_k^{(1)} - 2\chi_k^* \lambda_k Q_k^{(2)}) + \chi_k^* \theta_1 \lambda_{2k} Q_k^{(3)}(Q_k^{(3)} - 2\chi_k^* \lambda_k Q_k^{(4)})\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|B_k| = {}& \theta_1 \Lambda_k^{(2)}\Lambda_k^{(3)}\Lambda_k^{(4)} Q_k^{(1)} Q_k^{(2)} + \chi_k \theta_1 \theta_2 \lambda_k \Lambda_k^{(4)} Q_k^{(1)} Q_k^{(4)} + \chi_k \theta_1 \theta_2 \lambda_k (Q_k^{(2)})^2 + \chi_k \theta_1 \theta_2 \lambda_k \Lambda_k^{(2)} Q_k^{(2)} Q_k^{(3)} \\
&+ \theta_1 \Lambda_k^{(2)}\Lambda_k^{(3)} Q_k^{(2)} Q_k^{(4)} + \chi_k \theta_1 \theta_2 \lambda_k (Q_k^{(4)})^2 + \theta_2 \Lambda_k^{(1)}\Lambda_k^{(4)} Q_k^{(2)} Q_k^{(4)} + \theta_2 \Lambda_k^{(1)}\Lambda_k^{(2)}\Lambda_k^{(4)} Q_k^{(3)} Q_k^{(4)},
\end{aligned}
$$

$$
|C_k| = \Lambda_{2k}^{(1)}\Lambda_{2k}^{(2)}\Lambda_{2k}^{(3)}\Lambda_{2k}^{(4)} - (\chi_k^*)^2 \theta_1 \theta_2 \lambda_{2k}^2.
$$

■

7　系 1.5 の証明

(1) $\theta_1 = \theta_2 = 1,\ D_1 = D_3 = \varepsilon > 0,\ D_2 = D_4 = D > 0$ のとき,

$$
\begin{pmatrix} \Lambda_k^{(1)} \\ \Lambda_k^{(2)} \\ \Lambda_k^{(3)} \\ \Lambda_k^{(4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\varepsilon\lambda_k + 1) \\ (D\lambda_k + 1) \\ (\varepsilon\lambda_k + 1) \\ (D\lambda_k + 1) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} Q_k^{(1)} \\ Q_k^{(2)} \\ Q_k^{(3)} \\ Q_k^{(4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\varepsilon\lambda_k + 1)(D\lambda_k + 1)^2 \\ \chi_k^* \lambda_k \\ \chi_k^* \lambda_k (D\lambda_k + 1) \\ (\varepsilon\lambda_k + 1)(D\lambda_k + 1) \end{pmatrix}.
$$

点 $(1,1,1,1)$ が分岐点ならば,

$$
\Lambda_k^{(1)}\Lambda_k^{(2)}\Lambda_k^{(3)}\Lambda_k^{(4)} - (\chi_k^*)^2 \lambda_k^2 = 0
$$

すなわち,

$$
\chi_k^* \lambda_k = (\varepsilon\lambda_k + 1)(D\lambda_k + 1)
$$

が成り立つ. 定理 1.4 より,

$$
B_k = \begin{pmatrix} (\varepsilon\lambda_k + 1)(D\lambda_k + 1)^2 & (\varepsilon\lambda_k + 1)(D\lambda_k + 1) & (\varepsilon\lambda_k + 1)(D\lambda_k + 1)^2 & (\varepsilon\lambda_k + 1)(D\lambda_k + 1) \\ 0 & -(D\lambda_k + 1) & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -(D\lambda_k + 1) \\ (\varepsilon\lambda_k + 1)^2(D\lambda_k + 1) & -(\varepsilon\lambda_k + 1)^2(D\lambda_k + 1)^2 & -(\varepsilon\lambda_k + 1)^2(D\lambda_k + 1) & (\varepsilon\lambda_k + 1)^2(D\lambda_k + 1)^2 \end{pmatrix},
$$

$$
\begin{aligned}
|B_k| &= (\varepsilon\lambda_k+1)(D\lambda_k+1)^2 \begin{vmatrix} -(D\lambda_k+1) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -(D\lambda_k+1) \\ -(\varepsilon\lambda_k+1)^2(D\lambda_k+1)^2 & -(\varepsilon\lambda_k+1)^2(D\lambda_k+1) & (\varepsilon\lambda_k+1)^2(D\lambda_k+1)^2 \end{vmatrix} \\
&+ \begin{vmatrix} (\varepsilon\lambda_k+1)(D\lambda_k+1) & (\varepsilon\lambda_k+1)(D\lambda_k+1)^2 & (\varepsilon\lambda_k+1)(D\lambda_k+1) \\ -(D\lambda_k+1) & 1 & 0 \\ -(\varepsilon\lambda_k+1)^2(D\lambda_k+1)^2 & -(\varepsilon\lambda_k+1)^2(D\lambda_k+1) & (\varepsilon\lambda_k+1)^2(D\lambda_k+1)^2 \end{vmatrix} \\
&- (\varepsilon\lambda_k+1)^2(D\lambda_k+1) \begin{vmatrix} (\varepsilon\lambda_k+1)(D\lambda_k+1) & (\varepsilon\lambda_k+1)(D\lambda_k+1)^2 & (\varepsilon\lambda_k+1)(D\lambda_k+1) \\ -(D\lambda_k+1) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -(D\lambda_k+1) \end{vmatrix} \\
&= (\varepsilon\lambda_k+1)^3(D\lambda_k+1)^5 + (\varepsilon\lambda_k+1)^3(D\lambda_k+1)^5 \\
&+ (\varepsilon\lambda_k+1)^3(D\lambda_k+1)^3 + (\varepsilon\lambda_k+1)^3(D\lambda_k+1)^5 \\
&+ (\varepsilon\lambda_k+1)^3(D\lambda_k+1)^3 + (\varepsilon\lambda_k+1)^3(D\lambda_k+1)^3 \\
&+ (\varepsilon\lambda_k+1)^3(D\lambda_k+1)^3 + (\varepsilon\lambda_k+1)^3(D\lambda_k+1)^5 \\
&= 4(\varepsilon\lambda_k+1)^3(D\lambda_k+1)^5 + 4(\varepsilon\lambda_k+1)^3(D\lambda_k+1)^3 \\
&> 0,
\end{aligned}
$$

$$
B_k^{-1} = \frac{1}{|B_k|} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{pmatrix},
$$

$$
b_{11} = 2(\varepsilon\lambda_k+1)^2(D\lambda_k+1)^3,\ b_{12} = -(\varepsilon\lambda_k+1)^3(D\lambda_k+1)^5 + (\varepsilon\lambda_k+1)^3(D\lambda_k+1)^3,
$$

$$
b_{13} = (\varepsilon\lambda_k+1)^3(D\lambda_k+1)^5 + 3(\varepsilon\lambda_k+1)^3(D\lambda_k+1)^3,\ b_{14} = (\varepsilon\lambda_k+1)(D\lambda_k+1)^4 + (\varepsilon\lambda_k+1)(D\lambda_k+1)^2,
$$

$$
b_{21} = 2(\varepsilon\lambda_k+1)^2(D\lambda_k+1)^2,\ b_{22} = -3(\varepsilon\lambda_k+1)^3(D\lambda_k+1)^4 - (\varepsilon\lambda_k+1)^3(D\lambda_k+1)^2,
$$

$$
b_{23} = -(\varepsilon\lambda_k+1)^3(D\lambda_k+1)^4 + (\varepsilon\lambda_k+1)^3(D\lambda_k+1)^2,\ b_{24} = -(\varepsilon\lambda_k+1)(D\lambda_k+1)^3 - (\varepsilon\lambda_k+1)(D\lambda_k+1),
$$

$$
b_{31} = 2(\varepsilon\lambda_k+1)^2(D\lambda_k+1)^3,\ b_{32} = (\varepsilon\lambda_k+1)^3(D\lambda_k+1)^5 + 3(\varepsilon\lambda_k+1)^3(D\lambda_k+1)^3,
$$

$$
b_{33} = -(\varepsilon\lambda_k+1)^3(D\lambda_k+1)^5 + (\varepsilon\lambda_k+1)^3(D\lambda_k+1)^3,\ b_{34} = -(\varepsilon\lambda_k+1)(D\lambda_k+1)^4 - (\varepsilon\lambda_k+1)(D\lambda_k+1)^2,
$$

$$
b_{41} = 2(\varepsilon\lambda_k+1)^2(D\lambda_k+1)^2,\ b_{42} = -(\varepsilon\lambda_k+1)^3(D\lambda_k+1)^4 + (\varepsilon\lambda_k+1)^3(D\lambda_k+1)^2,
$$

$$
b_{43} = -3(\varepsilon\lambda_k+1)^3(D\lambda_k+1)^4 - (\varepsilon\lambda_k+1)^3(D\lambda_k+1)^2,\ b_{44} = (\varepsilon\lambda_k+1)(D\lambda_k+1)^3 + (\varepsilon\lambda_k+1)(D\lambda_k+1),
$$

$$
\begin{pmatrix} \int_I \varphi_2 \cos(\frac{k\pi x}{L})dx \\ \int_I \psi_2 \cos(\frac{k\pi x}{L})dx \\ \int_I \eta_2 \cos(\frac{k\pi x}{L})dx \\ \int_I \xi_2 \cos(\frac{k\pi x}{L})dx \end{pmatrix} = \frac{\alpha}{|B_k|} \begin{pmatrix} (\varepsilon\lambda_k+1)(D\lambda_k+1)^4 + (\varepsilon\lambda_k+1)(D\lambda_k+1)^2 \\ -(\varepsilon\lambda_k+1)(D\lambda_k+1)^3 - (\varepsilon\lambda_k+1)(D\lambda_k+1) \\ -(\varepsilon\lambda_k+1)(D\lambda_k+1)^4 - (\varepsilon\lambda_k+1)(D\lambda_k+1)^2 \\ (\varepsilon\lambda_k+1)(D\lambda_k+1)^3 + (\varepsilon\lambda_k+1)(D\lambda_k+1) \end{pmatrix},
$$

$$
C_k = \begin{pmatrix} -(4\varepsilon\lambda_k+1) & 4(\varepsilon\lambda_k+1)(D\lambda_k+1) & 0 & 0 \\ 0 & -(4D\lambda_k+1) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -(4\varepsilon\lambda_k+1) & 4(\varepsilon\lambda_k+1)(D\lambda_k+1) \\ 1 & 0 & 0 & -(4D\lambda_k+1) \end{pmatrix},
$$

$$
\begin{aligned}
|C_k| &= -(4\varepsilon\lambda_k+1) \begin{vmatrix} -(4D\lambda_k+1) & 1 & 0 \\ 0 & -(4\varepsilon\lambda_k+1) & 4(\varepsilon\lambda_k+1)(D\lambda_k+1) \\ 0 & 0 & -(4D\lambda_k+1) \end{vmatrix} \\
&- \begin{vmatrix} 4(\varepsilon\lambda_k+1)(D\lambda_k+1) & 0 & 0 \\ -(4D\lambda_k+1) & 1 & 0 \\ 0 & -(4\varepsilon\lambda_k+1) & 4(\varepsilon\lambda_k+1)(D\lambda_k+1) \end{vmatrix} \\
&= (4\varepsilon\lambda_k+1)^2(4D\lambda_k+1)^2 - 16(\varepsilon\lambda_k+1)^2(D\lambda_k+1)^2 \\
&< 0,
\end{aligned}
$$

$$C_k^{-1} = -\frac{1}{|C_k|}\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{pmatrix},$$

$$c_{11} = (4\varepsilon\lambda_k+1)(4D\lambda_k+1)^2,\ c_{12} = 4(4\varepsilon\lambda_k+1)(\varepsilon\lambda_k+1)(4D\lambda_k+1)(D\lambda_k+1),$$

$$c_{13} = 4(\varepsilon\lambda_k+1)(4D\lambda_k+1)(D\lambda_k+1),\ c_{14} = 16(\varepsilon\lambda_k+1)^2(D\lambda_k+1)^2,$$

$$c_{21} = 4(\varepsilon\lambda_k+1)(D\lambda_k+1),\ c_{22} = (4\varepsilon\lambda_k+1)^2(4D\lambda_k+1),$$

$$c_{23} = (4\varepsilon\lambda_k+1)(4D\lambda_k+1),\ c_{24} = 4(4\varepsilon\lambda_k+1)(\varepsilon\lambda_k+1)(D\lambda_k+1),$$

$$c_{31} = 4(\varepsilon\lambda_k+1)(4D\lambda_k+1)(D\lambda_k+1),\ c_{32} = 16(\varepsilon\lambda_k+1)^2(D\lambda_k+1)^2,$$

$$c_{33} = (4\varepsilon\lambda_k+1)(4D\lambda_k+1)^2,\ c_{34} = 4(4\varepsilon\lambda_k+1)(\varepsilon\lambda_k+1)(4D\lambda_k+1)(D\lambda_k+1),$$

$$c_{41} = (4\varepsilon\lambda_k+1)(4D\lambda_k+1),\ c_{42} = 4(4\varepsilon\lambda_k+1)(\varepsilon\lambda_k+1)(D\lambda_k+1),$$

$$c_{43} = 4(\varepsilon\lambda_k+1)(D\lambda_k+1),\ c_{44} = (4\varepsilon\lambda_k+1)^2(4D\lambda_k+1),$$

$$\begin{pmatrix} \int_I \varphi_1 \cos(\frac{2k\pi x}{L})dx \\ \int_I \psi_1 \cos(\frac{2k\pi x}{L})dx \\ \int_I \eta_1 \cos(\frac{2k\pi x}{L})dx \\ \int_I \xi_1 \cos(\frac{2k\pi x}{L})dx) \end{pmatrix} = -\frac{(\varepsilon\lambda_k+1)^2(D\lambda_k+1)^4L}{4|C_k|}(1-2(\varepsilon\lambda_k+1))$$

$$\times \begin{pmatrix} (4\varepsilon\lambda_k+1)(4D\lambda_k+1)^2 + 4(\varepsilon\lambda_k+1)(4D\lambda_k+1)(D\lambda_k+1) \\ 4(\varepsilon\lambda_k+1)(D\lambda_k+1) + (4\varepsilon\lambda_k+1)(4D\lambda_k+1) \\ 4(\varepsilon\lambda_k+1)(4D\lambda_k+1)(D\lambda_k+1) + (4\varepsilon\lambda_k+1)(4D\lambda_k+1)^2 \\ (4\varepsilon\lambda_k+1)(4D\lambda_k+1) + 4(\varepsilon\lambda_k+1)(D\lambda_k+1) \end{pmatrix},$$

$$\int_I \varphi_1 dx = \int_I \eta_1 dx = -\frac{(\varepsilon\lambda_k+1)^2(D\lambda_k+1)^4L}{2}$$

を得る. また,

$$\Lambda_k^{(1)} = \Lambda_k^{(3)},\ \Lambda_k^{(2)} = \Lambda_k^{(4)},\ Q_k^{(1)} = Q_k^{(3)},\ Q_k^{(2)} = Q_k^{(4)}$$

より, $\alpha = 0$. すなわち,

$$\frac{\lambda_k Q_k^{(2)} L}{2}K_3 = (Q_k^{(1)} - \frac{1}{2}\chi_k^* \lambda_k Q_k^{(2)})\int_I \varphi_1 dx + (Q_k^{(1)} + \frac{1}{2}\chi_k^*\lambda_k Q_k^{(2)})\int_I \varphi_1 \cos(\frac{2k\pi x}{L})dx - \chi_k^*\lambda_k Q_k^{(1)}\int_I \psi_1 \cos(\frac{2k\pi x}{L})dx.$$

以上より,

$$\begin{aligned}
&\frac{\lambda_k(\varepsilon\lambda_k+1)(D\lambda_k+1)L}{2}K_3 \\
&= -(\varepsilon\lambda_k+1)(D\lambda_k+1)^2(1-\frac{1}{2}(\varepsilon\lambda_k+1))\frac{(\varepsilon\lambda_k+1)^2(D\lambda_k+1)^4L}{2} \\
&- (\varepsilon\lambda_k+1)(D\lambda_k+1)^2(1+\frac{1}{2}(\varepsilon\lambda_k+1)) \\
&\times \frac{(\varepsilon\lambda_k+1)^2(D\lambda_k+1)^4L}{4|C_k|}(1-2(\varepsilon\lambda_k+1))\{(4\varepsilon\lambda_k+1)(4D\lambda_k+1)^2 + 4(\varepsilon\lambda_k+1)(4D\lambda_k+1)(D\lambda_k+1)\} \\
&+ (\varepsilon\lambda_k+1)^2(D\lambda_k+1)^3 \\
&\times \frac{(\varepsilon\lambda_k+1)^2(D\lambda_k+1)^4L}{4|C_k|}(1-2(\varepsilon\lambda_k+1))\{4(\varepsilon\lambda_k+1)(D\lambda_k+1) + (4\varepsilon\lambda_k+1)(4D\lambda_k+1)\}
\end{aligned}$$

ここで, $\varepsilon \to 0$ とすると,

$$\begin{aligned}\frac{\lambda_k(D\lambda_k+1)L}{2}K_3 &= -\frac{(D\lambda_k+1)^6L}{4}\\&+\frac{3(D\lambda_k+1)^6L}{8|C_k|}\{(4D\lambda_k+1)^2+4(4D\lambda_k+1)(D\lambda_k+1)\}\\&-\frac{(D\lambda_k+1)^7L}{4|C_k|}\{4(D\lambda_k+1)+(4D\lambda_k+1)\}\\&=-\frac{(D\lambda_k+1)^6L}{4}+\frac{(D\lambda_k+1)^6L}{8|C_k|}(80D^2\lambda_k^2+58D\lambda_k+5)\\&<0\end{aligned}$$

より, 十分小さな $\varepsilon > 0$ に対しても, $K_3 < 0$ を得る.

(2) $\theta_1 = \theta_2 = 1,\ D_2 = D_4 = \varepsilon > 0,\ D_1 = D_3 = D > 0$ のとき,

$$\begin{pmatrix}\Lambda_k^{(1)}\\\Lambda_k^{(2)}\\\Lambda_k^{(3)}\\\Lambda_k^{(4)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(D\lambda_k+1)\\(\varepsilon\lambda_k+1)\\(D\lambda_k+1)\\(\varepsilon\lambda_k+1)\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}Q_k^{(1)}\\Q_k^{(2)}\\Q_k^{(3)}\\Q_k^{(4)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(\varepsilon\lambda_k+1)^2(D\lambda_k+1)\\\chi_k^*\lambda_k\\\chi_k^*\lambda_k(\varepsilon\lambda_k+1)\\(\varepsilon\lambda_k+1)(D\lambda_k+1)\end{pmatrix}.$$

点 $(1,1,1,1)$ が分岐点ならば,

$$\Lambda_k^{(1)}\Lambda_k^{(2)}\Lambda_k^{(3)}\Lambda_k^{(4)}-(\chi_k^*)^2\lambda_k^2=0$$

すなわち,

$$\chi_k^*\lambda_k=(\varepsilon\lambda_k+1)(D\lambda_k+1)$$

が成り立つ. これらを (1) に対応させて,

$$|B_k|=4(\varepsilon\lambda_k+1)^5(D\lambda_k+1)^3+4(\varepsilon\lambda_k+1)^3(D\lambda_k+1)^3>0,$$

$$\begin{pmatrix}\int_I\varphi_2\cos(\frac{k\pi x}{L})dx\\\int_I\psi_2\cos(\frac{k\pi x}{L})dx\\\int_I\eta_2\cos(\frac{k\pi x}{L})dx\\\int_I\xi_2\cos(\frac{k\pi x}{L})dx\end{pmatrix}=\frac{\alpha}{|B_k|}\begin{pmatrix}(\varepsilon\lambda_k+1)^4(D\lambda_k+1)^1+(\varepsilon\lambda_k+1)^2(D\lambda_k+1)\\-(\varepsilon\lambda_k+1)^3(D\lambda_k+1)-(\varepsilon\lambda_k+1)(D\lambda_k+1)\\-(\varepsilon\lambda_k+1)^4(D\lambda_k+1)-(\varepsilon\lambda_k+1)^2(D\lambda_k+1)\\(\varepsilon\lambda_k+1)^3(D\lambda_k+1)+(\varepsilon\lambda_k+1)(D\lambda_k+1)\end{pmatrix},$$

$$|C_k|=(4\varepsilon\lambda_k+1)^2(4D\lambda_k+1)^2-16(\varepsilon\lambda_k+1)^2(D\lambda_k+1)^2<0,$$

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\int_I\varphi_1\cos(\frac{2k\pi x}{L})dx\\\int_I\psi_1\cos(\frac{2k\pi x}{L})dx\\\int_I\eta_1\cos(\frac{2k\pi x}{L})dx\\\int_I\xi_1\cos(\frac{2k\pi x}{L})dx)\end{pmatrix}&=-\frac{(\varepsilon\lambda_k+1)^4(D\lambda_k+1)^2L}{4|C_k|}(1-2(D\lambda_k+1))\\&\times\begin{pmatrix}(4\varepsilon\lambda_k+1)^2(4D\lambda_k+1)+4(4\varepsilon\lambda_k+1)(\varepsilon\lambda_k+1)(D\lambda_k+1)\\4(\varepsilon\lambda_k+1)(D\lambda_k+1)+(4\varepsilon\lambda_k+1)(4D\lambda_k+1)\\4(4\varepsilon\lambda_k+1)(\varepsilon\lambda_k+1)(D\lambda_k+1)+(4\varepsilon\lambda_k+1)^2(4D\lambda_k+1)\\(4\varepsilon\lambda_k+1)(4D\lambda_k+1)+4(\varepsilon\lambda_k+1)(D\lambda_k+1)\end{pmatrix},\end{aligned}$$

$$\int_I\varphi_1dx=\int_I\eta_1dx=-\frac{(\varepsilon\lambda_k+1)^4(D\lambda_k+1)^2L}{2}$$

を得る. また,

$$\Lambda_k^{(1)}=\Lambda_k^{(3)},\ \Lambda_k^{(2)}=\Lambda_k^{(4)},\ Q_k^{(1)}=Q_k^{(3)},\ Q_k^{(2)}=Q_k^{(4)}$$

より, $\alpha=0$. 以上より,

$$
\begin{aligned}
&\frac{\lambda_k(\varepsilon\lambda_k+1)(D\lambda_k+1)L}{2}K_3\\
&=-(\varepsilon\lambda_k+1)^2(D\lambda_k+1)(1-\frac{1}{2}(D\lambda_k+1))\frac{(\varepsilon\lambda_k+1)^4(D\lambda_k+1)^2L}{2}\\
&-(\varepsilon\lambda_k+1)^2(D\lambda_k+1)(1+\frac{1}{2}(D\lambda_k+1))\\
&\times\frac{(\varepsilon\lambda_k+1)^4(D\lambda_k+1)^2L}{4|C_k|}(1-2(D\lambda_k+1))\{(4\varepsilon\lambda_k+1)^2(4D\lambda_k+1)+4(4\varepsilon\lambda_k+1)(\varepsilon\lambda_k+1)(D\lambda_k+1)\}\\
&+(\varepsilon\lambda_k+1)^3(D\lambda_k+1)^2\\
&\times\frac{(\varepsilon\lambda_k+1)^4(D\lambda_k+1)^2L}{4|C_k|}(1-2(D\lambda_k+1))\{4(\varepsilon\lambda_k+1)(D\lambda_k+1)+(4\varepsilon\lambda_k+1)(4D\lambda_k+1)\}
\end{aligned}
$$

ここで, $\varepsilon\to 0$ とすると,

$$
\begin{aligned}
\frac{\lambda_k(D\lambda_k+1)L}{2}K_3&=-(1-\frac{1}{2}(D\lambda_k+1))\frac{(D\lambda_k+1)^3L}{2}\\
&-(1+\frac{1}{2}(D\lambda_k+1))\frac{(D\lambda_k+1)^3L}{4|C_k|}(1-2(D\lambda_k+1))\{(4D\lambda_k+1)+4(D\lambda_k+1)\}\\
&+\frac{(D\lambda_k+1)^4L}{4|C_k|}(1-2(D\lambda_k+1))\{4(D\lambda_k+1)+(4D\lambda_k+1)\}\\
&=-\frac{(D\lambda_k+1)^3L}{4|C_k|}[-(D\lambda_k-1)|C_k|-\{(1+\frac{1}{2}(D\lambda_k+1))-(D\lambda_k+1)\}(2D\lambda_k+1)(8D\lambda_k+5)]\\
&=-\frac{(D\lambda_k+1)^3L}{8|C_k|}(D\lambda_k-1)\{16D^2\lambda_k^2+18D\lambda_k+5-2|C_k|\}
\end{aligned}
$$

より, 十分小さな $\varepsilon>0$ に対しても, $D<\frac{1}{\lambda_k}$ ならば, $K_3<0$, $D>\frac{1}{\lambda_k}$ ならば, $K_3>0$ を得る. ■

8 定理 1.6 の証明

$\chi^*_{k_0}:=\min_{k\geq 1}\chi^*_k$ とする. $\chi^*_{k_0}$ における分岐解 $(u_k(s,x),v_k(s,x),w_k(s,x),z_k(s,x))$ での線形化固有値問題を考える.

$$D_{\vec{u}}F(u_k(s,x),v_k(s,x),w_k(s,x),z_k(s,x),\chi_k(s))(\varphi,\psi,\eta,\xi)=\lambda(s)(\varphi,\psi,\eta,\xi)$$

とする. また, $\chi\in(\chi^*_{k_0}-\delta,\chi^*_{k_0}+\delta)$ に対して,

$$D_{\vec{u}}F(\bar{u},\chi)(u,v,w,z)=\begin{pmatrix}D_1u_{xx}-\chi\theta_1v_{xx}-\theta_1u\\ D_2v_{xx}-v+w\\ D_3w_{xx}-\chi\theta_2z_{xx}-\theta_2w\\ D_4z_{xx}-z+u\end{pmatrix}=\mu(\chi)\begin{pmatrix}u(\chi,x)\\ v(\chi,x)\\ w(\chi,x)\\ z(\chi,x)\end{pmatrix}$$

なる $\mu(\chi)$ と $\begin{pmatrix} u(\chi,x) \\ v(\chi,x) \\ w(\chi,x) \\ z(\chi,x) \end{pmatrix}$ で,

$$\mu(\chi^*_{k_0}) = 0, \quad \begin{pmatrix} u(\chi^*_{k_0},x) \\ v(\chi^*_{k_0},x) \\ w(\chi^*_{k_0},x) \\ z(\chi^*_{k_0},x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1(x) \\ v_1(x) \\ w_1(x) \\ z_1(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q^{(1)}_k \\ Q^{(2)}_k \\ Q^{(3)}_k \\ Q^{(4)}_k \end{pmatrix} \cos(\frac{k_0\pi x}{L})$$

なるものが存在する ([1] Corollary1.13. 参照). $\dot{u(x)} = \frac{\partial u}{\partial \chi}(x,\chi)$ などにより,

$$\begin{pmatrix} D_1\dot{u}_{xx} - \theta_1(v_1)_{xx} - \chi^*_{k_0}\theta_1\dot{v}_{xx} - \theta_1\dot{u} \\ D_2\dot{v}_{xx} - \dot{v} + \dot{w} \\ D_3\dot{w}_{xx} - \theta_2(z_1)_{xx} - \chi^*_{k_0}\theta_2\dot{z}_{xx} - \theta_2\dot{w} \\ D_4\dot{z}_{xx} - \dot{z} + \dot{u} \end{pmatrix} = \dot{\mu}(\chi^*_{k_0}) \begin{pmatrix} u_1(x) \\ v_1(x) \\ w_1(x) \\ z_1(x) \end{pmatrix}$$

を得る. 両辺に $\cos(\frac{k_0\pi x}{L})$ をかけて I 上積分して,

$$\begin{pmatrix} -\Lambda^{(1)}_{k_0} & \chi^*_{k_0}\theta_1\lambda_{k_0} & 0 & 0 \\ 0 & -\Lambda^{(2)}_{k_0} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\Lambda^{(3)}_{k_0} & \chi^*_{k_0}\theta_2\lambda_{k_0} \\ 1 & 0 & 0 & -\Lambda^{(4)}_{k_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \int_I \dot{u}\cos(\frac{k_0\pi x}{L})dx \\ \int_I \dot{v}\cos(\frac{k_0\pi x}{L})dx \\ \int_I \dot{w}\cos(\frac{k_0\pi x}{L})dx \\ \int_I \dot{z}\cos(\frac{k_0\pi x}{L})dx \end{pmatrix} = \frac{L}{2} \begin{pmatrix} \dot{\mu}(\chi^*_{k_0})Q^{(1)}_k - \theta_1\lambda_{k_0}Q^{(2)}_k \\ \dot{\mu}(\chi^*_{k_0})Q^{(2)}_k \\ \dot{\mu}(\chi^*_{k_0})Q^{(3)}_k - \theta_2\lambda_{k_0}Q^{(4)}_k \\ \dot{\mu}(\chi^*_{k_0})Q^{(4)}_k \end{pmatrix} \tag{8.1}$$

を得る.

$$A_{k_0}(\chi^*_{k_0}) := \begin{pmatrix} -\Lambda^{(1)}_{k_0} & \chi^*_{k_0}\theta_1\lambda_{k_0} & 0 & 0 \\ 0 & -\Lambda^{(2)}_{k_0} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\Lambda^{(3)}_{k_0} & \chi^*_{k_0}\theta_2\lambda_{k_0} \\ 1 & 0 & 0 & -\Lambda^{(4)}_{k_0} \end{pmatrix}$$

として,

$$N({}^tA_{k_0}(\chi^*_{k_0})) = c \begin{pmatrix} \Lambda^{(2)}_{k_0}\Lambda^{(3)}_{k_0} \\ \chi^*_{k_0}\theta_1\lambda_{k_0}\Lambda^{(3)}_{k_0} \\ \chi^*_{k_0}\theta_1\lambda_{k_0} \\ \Lambda^{(1)}_{k_0}\Lambda^{(2)}_{k_0}\Lambda^{(3)}_{k_0} \end{pmatrix}$$

より, (8.1) が解 $\begin{pmatrix} \int_I \dot{u}\cos(\frac{k_0\pi x}{L})dx \\ \int_I \dot{v}\cos(\frac{k_0\pi x}{L})dx \\ \int_I \dot{w}\cos(\frac{k_0\pi x}{L})dx \\ \int_I \dot{z}\cos(\frac{k_0\pi x}{L})dx \end{pmatrix}$ をもつための条件として,

$$\begin{pmatrix} \dot{\mu}(\chi^*_{k_0})Q^{(1)}_k - \theta_1\lambda_{k_0}Q^{(2)}_k \\ \dot{\mu}(\chi^*_{k_0})Q^{(2)}_k \\ \dot{\mu}(\chi^*_{k_0})Q^{(3)}_k - \theta_2\lambda_{k_0}Q^{(4)}_k \\ \dot{\mu}(\chi^*_{k_0})Q^{(4)}_k \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} \Lambda^{(2)}_{k_0}\Lambda^{(3)}_{k_0} \\ \chi^*_{k_0}\theta_1\lambda_{k_0}\Lambda^{(3)}_{k_0} \\ \chi^*_{k_0}\theta_1\lambda_{k_0} \\ \Lambda^{(1)}_{k_0}\Lambda^{(2)}_{k_0}\Lambda^{(3)}_{k_0} \end{pmatrix}$$

を満たす必要がある. すなわち,

$$\begin{aligned} &\{\dot{\mu}(\chi^*_{k_0})Q^{(1)}_k - \theta_1\lambda_{k_0}Q^{(2)}_k\}\Lambda^{(2)}_{k_0}\Lambda^{(3)}_{k_0} + \dot{\mu}(\chi^*_{k_0})\chi^*_{k_0}\theta_1\lambda_{k_0}\Lambda^{(3)}_{k_0}Q^{(2)}_k \\ &\qquad + \{\dot{\mu}(\chi^*_{k_0})Q^{(3)}_k - \theta_2\lambda_{k_0}Q^{(4)}_k\}\chi^*_{k_0}\theta_1\lambda_{k_0} + \dot{\mu}(\chi^*_{k_0})\Lambda^{(1)}_{k_0}\Lambda^{(2)}_{k_0}\Lambda^{(3)}_{k_0}Q^{(4)}_k) = 0. \end{aligned}$$

これを解いて,

$$\dot{\mu}(\chi_{k_0}^*) = \frac{\theta_1\lambda_{k_0}\Lambda_{k_0}^{(2)}\Lambda_{k_0}^{(3)}Q_k^{(2)} + \chi_{k_0}^*\theta_1\theta_2\lambda_{k_0}^2 Q_k^{(4)}}{\Lambda_{k_0}^{(2)}\Lambda_{k_0}^{(3)}Q_k^{(1)} + \chi_{k_0}^*\theta_1\lambda_{k_0}\Lambda_{k_0}^{(3)}Q_k^{(2)} + \chi_{k_0}^*\theta_1\lambda_{k_0}Q_k^{(3)} + \Lambda_{k_0}^{(1)}\Lambda_{k_0}^{(2)}\Lambda_{k_0}^{(3)}Q_k^{(4)}} > 0$$

を得る. また, $\chi_{k_0}^*$ からの分岐解 $\begin{pmatrix} u_k(s,x) \\ v_k(s,x) \\ w_k(s,x) \\ z_k(s,x) \end{pmatrix}$ における線形化固有値問題の固有値 $\lambda(s)$ に対して,

$$\lim_{s\to 0,\lambda(s)\neq 0} \frac{-s\chi_{k_0}'(s)\dot{\mu}(\chi_{k_0}^*)}{\lambda(s)} = \lim_{s\to 0,\lambda(s)\neq 0} \frac{-2s^2K_3\dot{\mu}(\chi_{k_0}^*)}{\lambda(s)} = 1$$

が成り立つ ([1] Theorem1.16. 参照). ここで, $\lambda(0) = 0$ である. これより, 十分小さな $\delta > 0$ に対して, $s \in (-\delta, \delta)$, $s \neq 0$, $\chi_k^* = K_0$ のときの分岐解は, $K_3 > 0$ ならば $\lambda(s) < 0$ で安定, $K_3 < 0$ ならば $\lambda(s) > 0$ で不安定である. ■

参考文献

[1] M. G. Crandall, P. H. Rabinowitz, Bifurcation, perturbation of simple eigenvalues, itand linearized stability, Archive for Rational Mechanics and Analysis, 52 (1973) 161-180

[2] 増田久弥, 非線型数学, 朝倉書店, (1985) 95-110

[3] Q. Wang, J. Yan, C. Gai, Qualitative analysis of Keller-Segel chemotaxis models with logistic growth, Z. Angew. Math. Phys., 67:51 (2016)

[4] P. Zheng, C. Mu, Y. Mi, Global stability in a two-competing-species chemotaxis system with two chemicals, Differential and Integral Equations, 31 (2018) 547-558